Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2019-2020
Cursus préparatoire : Fondamentaux des mathématiques 2

Feuille n° 7 : Sommes de Riemann, intégrales

Exercice 1 (∗) Calculer les limites des suites suivantes :

1. $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$;
2. $b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2}$;
3. $c_n = \frac{1}{n^2} \prod_{k=1}^{n} (n^2+k^2)^{1/n}$;
4. $d_n = \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!n^n}}$;
5. $e_n = \sum_{k=1}^{n} \sin(\frac{k}{n})\sin(\frac{k}{n^2})$;
6. $f_n = \sum_{k=1}^{n} \sin^2(\frac{1}{\sqrt{k+n}})$;
7. $g_n = n^{-\frac{1}{2}(1+\frac{1}{n})}(1^1 2^2 3^3 \cdots n^n)^{\frac{1}{n^2}}$.

Indication : $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$ *pour tout* $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Exercice 2 Soit $x \in D := \mathbf{R} \setminus \{1,-1\}$, on pose $f(x) = \int_0^{2\pi} \ln(x^2 - 2\cos(t)x + 1)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est bien définie dans D.
2. Factoriser sur $\mathbb{C}$ le polynôme $X^n - 1$.
3. Calculer $f(x)$ à l'aide de ses sommes de Riemann.

Exercice 3 (∗) Intégrales, parité et périodicité.

1. Soit $a > 0$. Soit $f : [-a,a] \to \mathbf{R}$ une fonction continue sur $[-a,a]$.
   (a) Montrer que si f est paire, alors $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$.
   (b) Montrer que si f est impaire , alors $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
2. Soit $T > 0$. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continue sur $\mathbf{R}$ et T-périodique.
   (a) Montrer que pour tous réels a et b, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a+T}^{b+T} f(x)\,\mathrm{d}x$.
   (b) Montrer que pour tout réel a, $\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 4 Soit f une application continue sur $[0,1]$ à valeurs strictement positives. Montrer que

$$\int_0^1 \ln(f(t))\,\mathrm{d}t \leq \ln\left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

Exercice 5 Soit f continue sur $[0,1]$, déterminer la limite de

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}(n-k)\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 6 Soit a, b deux réels tels que $a < b$. Soit $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue.

1. Montrer que si f est à valeurs positives, et telle que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, alors f est identiquement nulle sur $[a,b]$.
2. Montrer que f est de signe constant sur $[a,b]$ si et seulement si

$$\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t = \left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right|.$$

Exercice 7 Calculer, sur un intervalle où le calcul est valable, les primitives des fonctions rationnelles suivantes :

(a) (∗) $\int \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$
(b) (∗) $\int \frac{x}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x$
(c) (∗) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4}$
(d) $\int \frac{x}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x$
(e) (∗) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3-1}$
(f) (∗) $\int \frac{x^2}{(x^2-1)^2}\,\mathrm{d}x$
(g) (∗) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}$
(h) $\int \frac{x^2+x+1}{x^2-x-1}\,\mathrm{d}x$
(i) (∗) $\int \frac{\mathrm{d}x}{4x^2+4x+5}$
(j) $\int \frac{5x}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$
(k) $\int \frac{2x+4}{x^3+5x^2+9x+5}\,\mathrm{d}x$

Exercice 8 (∗) Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\int_0^1 xe^{1+x^2}\,\mathrm{d}x$
(b) $\int_1^e \frac{\cos(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x$
(c) $\int_0^1 (x^3+1)e^{-x}\,\mathrm{d}x$
(d) $\int_1^2 \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$
(e) $\int_0^{1/2} (\operatorname{Arcsin} x)^2\,\mathrm{d}x$
(f) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{5\operatorname{ch} x + 3\operatorname{sh} x + 4}$

Exercice 9 (∗) En utilisant le changement de variable $t = \pi - x$, calculer :

$$I = \int_0^{\pi} x\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 10 ($*$) Primitives de polynômes et fractions rationnelles en cos et sin.

1. Soit $k \in \mathbf{N}^*$. En utilisant la relation : $\forall x \in \mathbf{R},\ \cos^{2k} x = (1-\sin^2 x)^k$, déterminer les primitives sur $\mathbf{R}$ de $x \mapsto \cos^{2k+1} x$.
2. Calculer les primitives sur $\mathbf{R}$ de $x \mapsto \cos^4 x$. *Indication : on pourra linéariser* $\cos^4 x$.
3. On veut calculer les primitives d'une fonction de la forme $R(\cos x, \sin x)$ où R est une fraction rationnelle en deux variables.

   Le changement de variable $t = \tan(\frac{x}{2})$ permet toujours de se ramener au calcul des primitives d'une fraction rationnelle en t. Mais les calculs sont souvent assez lourds (et le degré du dénominateur assez élevé). On peut dans certains cas utiliser un autre changement de variable, donné par les *règles de Bioche* :

   — si $R(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x$ est invariant par le changement de x en $\pi - x$, alors on pose $t = \sin x$;

   — si $R(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x$ est invariant par le changement de x en $-x$, alors on pose $t = \cos x$;

   — si $R(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x$ est invariant par le changement de x en $x + \pi$, alors on pose $t = \tan x$.

   Calculer les intégrales suivantes :

   (a) ($*$) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 x\,\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x}$ (c) ($*$) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1+2\cos x}$ (e) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{1+\tan x}{1+\sin(2x)}\,\mathrm{d}x$

   (b) ($*$) $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \frac{\tan x\,\mathrm{d}x}{1+\sin^2 x}$ (d) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{\sin^3 x+\cos^3 x}$ (f) $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\sin^2 x+2\tan^2 x}$

Exercice 11 Pour tout $(p,q) \in \mathbf{N}^2$, on pose $B(p,q) = \displaystyle\int_0^1 x^p(1-x)^q\,\mathrm{d}x$; c'est la « fonction Beta ».

1. Soit $(p,q) \in \mathbf{N}^2$. Comparer $B(p,q)$ et $B(q,p)$.
2. Montrer que pour tout $(p,q) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}$, $B(p,q) = \dfrac{p}{q+1}B(p-1,q+1)$.
3. Calculer $B(0,n)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
4. En déduire la valeur de $B(p,q)$ pour tout $(p,q) \in \mathbf{N}^2$.

Exercice 12 ($*$) On note $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, 0 \le x \le 1,\ \frac{1}{1+x^2} \le y \le e^{x/2}\}$.

1. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $\dfrac{1}{1+x^2} \le e^{x/2}$.
2. Dessiner D.
3. Calculer l'aire de D.

Exercice 13 Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_0^1 \ln(x^2+3)\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x$ (poser $x = \cos\theta$)

(c) $\displaystyle\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+1}}$ (poser $t = \sqrt{x+1}$)

(d) $\displaystyle\int_2^4 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-2}}$ (poser $t = \sqrt{2}/x$)

(e) $\displaystyle\int_2^3 x^2\ln(x^6-1)\,\mathrm{d}x$ (poser $t = x^3$)

(f) $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$

(g) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}t}{(\operatorname{sh} t+\operatorname{ch} t)^n}$

(h) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1+x+x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

(i) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\varphi}{\cos^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi$

(j) $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{\frac{t+7}{t+6}}\,\mathrm{d}t$

Exercice 14 ($*$)

1. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{1/2} \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x = 0$.
2. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x = 0$.
3. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/4} (\sin x)^n\,\mathrm{d}x = 0$.
4. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+x}\,\mathrm{d}x = 0$.

Exercice 15 Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue. Pour $n \geqslant 1$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^{n-1}f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $I_n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.
2. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. Effectuer une intégration par parties sur I_n puis montrer que $nI_n \to f(1)$ lorsque $n \to +\infty$.
3. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. Montrer que $\int_0^1 f(t)\sin(nt)dt \to 0$.

Exercice 16 Déterminer

$$\lim_{n\to\infty} a_n \int_0^1 x^{2n}\sin(\frac{\pi x}{2})dx$$

où $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n \sin(\frac{\pi k}{2n})$