Feuille 7 : Fractions rationnelles

Exercice 1. Donner la forme de la décomposition en éléments simples, sur $\mathbb{R}$ puis sur $\mathbb{C}$, des fractions rationnelles suivantes.

a) $\dfrac{1}{(X+1)(X-2)}$, $\dfrac{X}{(X+1)(X-2)}$, $\dfrac{X}{X^2-1}$.

b) $\dfrac{X+1}{X^2+1}$, $\dfrac{X^2}{X^3-1}$.

c) $\dfrac{X-1}{X^2(X^2+1)}$, $\dfrac{3}{(X^2+X+1)(X-1)^2}$.

d) $\dfrac{X^4}{X^2-3X+2}$, $\dfrac{X^4-X+2}{(X-1)(X^2-1)}$.

Indication 1.
a) Les racines sont réelles et simples. On peut alors trouver la décomposition par identification.
b) Même principe dans $\mathbb{C}$.
c) Attention aux racines multiples.
d) Commencer par une division euclidienne.

Exercice 2. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction

$$F(X) = \frac{1}{(X^2+1)^2 - X^2}.$$

Indication 2. Noter que F est paire, *i.e.* $F(X) = F(-X)$.

Exercice 3. Démontrer qu'il n'existe pas de fraction rationnelle E telle que $E^2 = X$.

Indication 3. On pourra commencer par regarder les degrés.

Exercice 4. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle $R_n(X) = \dfrac{n!}{X(X+1)\cdots(X+n)}$ où $n \in \mathbb{N}$.

Indication 4. On pourra utiliser le fait que les pôles de R_n sont simples.

Exercice 5. Soient p et q deux entiers naturels premiers entre eux. Déterminer les racines et pôles de la fraction rationnelle $\dfrac{(X^p-1)}{(X^q-1)}$ en précisant leur ordre de multiplicité.

Indication 5. Les racines de $X^n - 1$ sont les racines n-ième de l'unité ω^k pour $k = 0, \dots, n-1$ où $w = e^{2i\pi/n}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On pourra aussi penser à l'identité de Bezout pour deux entiers premiers entre eux.

Exercice 6. Soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1}$, $n \geq 2$.

1. Déterminer S_n en fonction de n pour tout $n \geq 2$.
2. En déduire sa limite.
3. Répéter les questions 1. et 2. pour la suite (S_n) définie par

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}, \ \forall n \geq 2$$

4. Faire de même pour la suite (S_n) définie par $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{4k}{4k^4+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Indication 6. 1. Faire une décomposition en éléments simples puis penser aux sommes téléscopiques.

4. Remarquer que $2(k+1)^2 - 2(k+1) + 1 = 2k^2 + 2k + 1$.

Exercice 7. Pour chacune des fonctions suivantes donner leur ensemble de définition, déterminer les équations des asymptotes en $\pm\infty$ puis étudier la position du graphe de la fonction par rapport aux asymptotes au voisinage de $\pm\infty$.

1. $f : x \mapsto \frac{x^2+2x+5}{x^2-3x+2}$
2. $g : x \mapsto \frac{2x^3+x^2-x+1}{x^2-3x+2}$
3. $h : x \mapsto \frac{2x^4+x^3+3x^2-6x+1}{2x^3-x^2}$

Indication 7. Commencer par décomposer en éléments simples les polynômes associés.

Exercice 8. 1. Montrer la relation

$$\cos((n+1)x) + \cos((n-1)x) = 2\cos(x)\cos(nx),$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$.

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un unique polynôme P_n tel que

$$P_n(\cos(x)) = \cos(nx), \ \forall x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

3. Donner $\deg(P_0)$ et $\deg(P_1)$. Montrer que P_n est de degré n et déterminer son terme dominant.
4. En utilisant la relation (1) déterminer les racines de P_n pour tout n.
5. Pour $n \geq 1$, décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction $\frac{1}{P_n}$.

Indication 8. 1. Utiliser les formules de trigonométrie.

2. Commencer avec P_0 et P_1 puis construire P_n par récurrence.
3. Utiliser la relation de récurrence trouvée à la question précédente.
4. Les racines sont $\xi_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$ pour k variant de 0 à $n-1$.