

---

**Feuille n° 9 : Fractions rationnelles**

---

**Exercice 1 (\*)** Décomposer en éléments simples sur  $\mathbf{R}$  les fractions rationnelles suivantes :

$$A(X) = \frac{X^2 + 2X + 5}{X^2 - 3X + 2} \quad ; \quad B(X) = \frac{X^2 + 1}{(X - 1)(X - 2)(X - 3)} \quad ; \quad C(X) = \frac{1}{X(X - 1)^2}$$
$$D(X) = \frac{4}{(X^2 - 1)^2} \quad ; \quad E(X) = \frac{1}{X^4 - 1} \quad ; \quad F(X) = \frac{1}{X^n(X - 1)}.$$

**Exercice 2 (\*)** Décomposer en éléments simples sur  $\mathbf{C}$  les fractions rationnelles suivantes :

$$A(X) = \frac{1}{X^2 + X + 1} \quad ; \quad B(X) = \frac{X}{(X - 1)(X^2 + 1)^2}$$
$$C(X) = \frac{1}{(X + 1)(X^3 + 1)} \quad ; \quad D(X) = \frac{P(X)}{X^n - 1}, \quad \text{où } P \in \mathbf{C}_{n-1}[X].$$

**Exercice 3 (\*)**

Décomposer la fraction  $\frac{1}{X^{2n} + 1}$  en éléments simples sur  $\mathbf{C}$  puis sur  $\mathbf{R}$ .

**Exercice 4 (\*)**

1. En décomposant en éléments simples la fraction rationnelle  $F(X) = \frac{1}{X(X + 1)}$ , calculer  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k + 1)}$ .
2. Calculer de manière analogue les sommes suivantes :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k + 1)(k + 2)} \quad ; \quad \sum_{k=1}^n \frac{k}{1 + k^2 + k^4} \quad ; \quad \sum_{k=3}^n \frac{2k - 1}{k(k^2 - 4)}.$$

**Exercice 5**

Calculer la dérivée d'ordre 28 de la fraction rationnelle  $F(X) = \frac{1}{X(X^2 + 1)}$ .

**Exercice 6**

1. Soit  $F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$  une fraction rationnelle irréductible de  $\mathbf{C}(X)$ . Montrer que si  $a$  est un pôle simple de  $F$ , alors la partie polaire associée à  $a$  est  $\frac{P(a)}{Q'(a)(X - a)}$ .
2. Soit  $n \in \mathbf{N}^*$ . Décomposer en éléments simples sur  $\mathbf{C}$  la fraction  $\frac{X^{n-1}}{X^n - 1}$ .

**Exercice 7**

Soit  $n \in \mathbf{N}$ . Pour  $k \in \mathbf{N}$ , on note  $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$ . Écrire la fraction rationnelle  $F(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega_k^2}{X - \omega_k}$  sous forme irréductible  $F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$ .

**Exercice 8**

On rappelle que  $\mathbf{C}[X]$  peut-être vu comme un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{C}(X)$  grâce à l'identification  $P(X) = \frac{P(X)}{1}$  pour tout  $P \in \mathbf{C}[X]$ . Montrer que  $V = \{F \in \mathbf{C}(X) \mid \deg F < 0\}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{C}(X)$ , puis montrer que  $\mathbf{C}(X) = \mathbf{C}[X] \oplus V$ .

**Exercice 9**

Soit  $H$  l'ensemble des fractions rationnelles  $F \in \mathbf{C}(X)$  telles que  $F\left(\frac{1}{X}\right) = F(X)$ .

1. Montrer que  $H$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{C}(X)$ .
2. Soit  $\Phi : \begin{cases} \mathbf{C}(X) & \rightarrow H \\ G & \mapsto G\left(X + \frac{1}{X}\right) \end{cases}$ . Montrer que  $\Phi$  est bien à valeurs dans  $H$ , et que c'est une application linéaire injective.
3. L'objectif de cette question est de montrer que  $\Phi$  est un isomorphisme.
  - (a) Montrer que, pour tout  $P \in \mathbf{C}[X]$ , il existe  $R \in \mathbf{C}[X]$  tel que  $R\left(X + \frac{1}{X}\right) = P(X) + P\left(\frac{1}{X}\right)$ .
  - (b) Soient  $F \in H$  et  $P, Q \in \mathbf{C}[X]$  tels que  $F = \frac{P}{Q}$  soit la forme irréductible de  $F$ . Montrer que

$$\frac{P(X)}{Q(X)} = \frac{P\left(\frac{1}{X}\right)}{Q\left(\frac{1}{X}\right)} = \frac{P(X) + P\left(\frac{1}{X}\right)}{Q(X) + Q\left(\frac{1}{X}\right)}.$$

- (c) En déduire que  $\Phi$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels.