Feuille n° 4 : Espaces vectoriels

Exercice 1 ($*$) Parmi les sous-ensembles de $\mathbf{R}^2$ ou $\mathbf{R}^3$ ci-dessous, lesquels sont des sous-espaces vectoriels ?

1. L'ensemble $D_1 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ 2x - 3y = 0\}$.
2. L'ensemble $D_2 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ 2x - 3y = 1\}$.
3. L'ensemble $D_3 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 - 3x + 4y = 0\}$.
4. L'ensemble $D_4 = \{(\alpha, 2\alpha) \ : \ \alpha \in \mathbf{R}\}$.
5. L'ensemble $D_5 = (\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+) \cup (\mathbf{R}^- \times \mathbf{R}^-)$.
6. L'ensemble $D_6 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ 9x^2 + 4y^2 - 12xy = 0\}$.
7. L'ensemble $D_7 = \{(\alpha, \beta, 0) \ : \ \alpha \in \mathbf{R}, \beta \in \mathbf{R}\}$.
8. L'ensemble $D_8 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ xy + yz + z + x = 0\}$.
9. L'ensemble $D_9 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ x + y + z = 0\}$.
10. L'ensemble $D_{10} = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ \sin(x) + \sin(y) + \sin(z) = 0\}$.

Exercice 2 Soient $F = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\}$ et $G = \{(a-b, a+b, a-3b) \mid (a,b) \in \mathbf{R}^2\}$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$.
2. Déterminer $F \cap G$.

Exercice 3 Soit $q \in \mathbf{R}$. Montrer que l'ensemble des suites géométriques réelles de raison q est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$. Même question avec $F = \{(u_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \mid \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+2} = nu_{n+1} + u_n\}$.

Exercice 4 Soit $E = \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ l'espace des applications de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$.

1. Rappeler la définition de la structure d'espace vectoriel usuelle sur E.
2. Les sous-ensembles suivants de E en sont-ils des sous-espaces vectoriels ?
   (a) L'ensemble des applications linéaires.
   (b) L'ensemble des applications continues.
   (c) L'ensemble des applications de classe C^∞.
   (d) L'ensemble des applications surjectives.
   (e) L'ensemble des applications f telles que $f^{-1}(\mathbf{R}^*)$ est fini.

Exercice 5 ($*$)

1. Donner un exemple d'entier n et de deux sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^n$ dont la réunion n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$.
2. Soit $n \in \mathbf{N}$, et soient F, G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^n$ tels que $F \cup G$ soit un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$. Montrer que $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 6 Soient F, G, H trois sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.

1. Montrer que $(F \cap G) + (F \cap H) \subset F \cap (G + H)$, et donner un exemple où l'inclusion est stricte.
2. Montrer que $(F \cap G) + (F \cap H) = F \cap (G + (F \cap H))$.

Exercice 7 ($*$) Les familles suivantes sont-elles libres ou liées ?

1. Dans $\mathbf{R}^2$: (a) $((3,2),(4,-1))$; (b) $((3,2),(4,-1),(5,-2))$.
2. Dans $\mathbf{R}^3$: (a) $((1,1,0),(1,0,1),(0,1,1))$; (b) $((1,1,0),(1,2,1),(0,1,1))$.

Exercice 8 Pour quels $\alpha \in \mathbf{R}$ la famille $((3,1,-4,6),(1,1,4,4),(1,0,-4,\alpha))$ est-elle libre dans $\mathbf{R}^4$?

Exercice 9 Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et e, f, g trois vecteurs de $\mathbf{R}^n$. On pose $u = e + f$, $v = e + g$ et $w = f + g$.

1. Montrer que la famille (e, f, g) est libre si et seulement si la famille (u, v, w) est libre.
2. Montrer que le sous-espace engendré par (e, f, g) est égal au sous-espace engendré par (u, v, w).

Exercice 10 $(*)$ Dans $\mathbf{R}^3$, on considère les vecteurs $u = (1,-1,1)$, $v = (0,-1,2)$ et $w = (1,-2,3)$.

1. La famille (u, v, w) est-elle libre ?
2. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par (u, v, w). Donner une base de F.
3. Soit $G = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ x + 2y + z = 0\}$. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$, puis que $F = G$.

Exercice 11 $(*)$ Montrer que les deux familles de vecteurs $((1,2,-1,3),(2,4,1,-2),(3,6,3,-7))$ et $((1,2,-4,11),(2,4,-5,14))$ engendrent le même sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}^4$.

Exercice 12 Dans $\mathbf{R}^4$, on considère la famille $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ formée des vecteurs $v_1 = (1,1,1,1)$, $v_2 = (1,2,3,4)$, $v_3 = (3,1,4,2)$, $v_4 = (10,4,13,7)$ et $v_5 = (1,7,8,14)$. Cette famille est-elle libre ? Sinon, en extraire une sous-famille libre engendrant le même sous-espace vectoriel qu'elle.

Exercice 13 Soit $n \in \mathbf{N}$ et soient $e_1, \ldots, e_k$ des vecteurs de $\mathbf{R}^n$. On note Φ l'application

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^k & \longrightarrow & \mathbf{R}^n \\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) & \longmapsto & \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_k e_k. \end{array}$$

1. Montrer que $(e_1, \ldots, e_k)$ engendre $\mathbf{R}^n$ si et seulement si Φ est surjective.
2. Montrer que $(e_1, \ldots, e_k)$ est libre si et seulement si Φ est injective.

Exercice 14 $(*)$ Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et soit (u, v, w) une famille libre de $\mathbf{R}^n$. On note

$$F = \{x \in \mathbf{R}^n \ : \ \exists(\alpha, \beta) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid x = (\alpha+\beta)u + (\alpha+2\beta)v + (\alpha+3\beta)w\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$.
2. Les vecteurs u, v et w appartiennent-ils à F ?
3. Donner une base de F.

Exercice 15 Soit $k \in \mathbf{N}$ et $\{P_0, \ldots, P_k\}$ une famille de polynômes tels que $\deg(P_i) = i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$. Montrer que cette famille est libre.

Exercice 16 $(*)$ Soit $n \geqslant 0$ un entier. On note $\mathbf{R}_n[X]$ l'espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

1. Quelle est la dimension de $\mathbf{R}_n[X]$?
2. Soit $(P_0, \ldots, P_n)$ une famille de polynômes telle que chaque P_k soit de degré k. Montrer que cette famille est une base de $\mathbf{R}_n[X]$.
3. Soit a un réel. Comment s'expriment les coordonnées d'un polynôme P de degré inférieur ou égal à n dans la base $(1, X-a, (X-a)^2, \ldots, (X-a)^n)$?

Exercice 17 Dans l'espace E de l'exercice précédent, montrer que les familles suivantes sont libres

1. $(\sin, \cos)$;
2. (f_1, f_2, f_3), où on a noté $f_k : x \mapsto x^k$;
3. (g_1, g_2, g_3), où on a noté $g_a : x \mapsto e^{ax}$;
4. (g_a, g_b, g_c), où a, b et c sont trois réels distincts.