

**Feuille n° 3 : Développements limités, équivalents, formules de Taylor**

**Exercice 1** Écrire la formule de Taylor-Young à l'ordre 4 pour les fonctions suivantes :

1.  $x \mapsto e^x$  au voisinage de 0.
2.  $x \mapsto \ln x$  au voisinage de 1. En déduire  $\lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \frac{\ln(1+h)-h}{h^2}$ .
3.  $x \mapsto 1 + x + x^2 + x^3$  au voisinage de 2.
4.  $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$  au voisinage de 0.

**Exercice 2** On considère les fonctions  $f, g$  et  $h$  définies sur  $\mathbf{R}$  par : pour tout  $x \in \mathbf{R}$ ,

$$f(x) = x^4 + x^3 - x, \quad g(x) = x^5 + 2x^4 + x^2 + 1, \quad h(x) = (x-1)^3.$$

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de chacune de ces fonctions.
2. Déterminer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de  $f$ .
3. Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 1 de  $f$  et de  $h$ .
4. Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de  $f + g$ .
5. Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de  $fg$ .
6. Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de  $\frac{1}{g}$ .

**Exercice 3** Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions à valeurs réelles définies au voisinage de 0, et quatre fois dérivables au voisinage de 0 dont les développements limités en 0 à l'ordre 4 sont donnés par

$$f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + o(x^4),$$

$$g(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + o(x^4).$$

1. Donner les valeurs de  $g''(0)$  et  $f^{(4)}(0)$ .
2. Calculer le développement limité en 0 des fonctions suivantes à l'ordre indiqué :
  - (a)  $fg$  à l'ordre 3,
  - (b)  $\frac{g}{f}$  à l'ordre 3,
  - (c)  $f \circ g$  à l'ordre 2,
  - (d)  $\ln f$  à l'ordre 2,
  - (e) la primitive de  $f$  qui vaut 1 en 0, à l'ordre 4.

**Exercice 4 (\*)** Soit  $a > 0$ .

1. Écrire la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 5 pour la fonction cosinus, sur l'intervalle  $[0, a]$ . Montrer que l'on a :

$$\left| \cos a - 1 + \frac{a^2}{2!} - \frac{a^4}{4!} \right| \leq \frac{a^5}{5!}.$$

2. En déduire l'encadrement :

$$\frac{337}{384} - \frac{1}{3840} \leq \cos \frac{1}{2} \leq \frac{337}{384} + \frac{1}{3840}.$$

**Exercice 5** Appliquer la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 à la fonction  $t \mapsto \sqrt{t}$  entre 25 et 26. En déduire une valeur approchée à  $10^{-3}$  près de  $\sqrt{26}$ .

**Exercice 6** Soit  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$ . On suppose que  $f$  et  $f''$  sont bornées sur  $\mathbf{R}$  et on note  $M_0 = \sup_{x \in \mathbf{R}} |f(x)|$  et  $M_2 = \sup_{x \in \mathbf{R}} |f''(x)|$ .

1. Montrer que pour tout  $x \in \mathbf{R}$ , tout  $h > 0$ , on a

$$|f'(x)| \leq \frac{2}{h} M_0 + \frac{h}{2} M_2.$$

2. En déduire que  $f'$  est bornée sur  $\mathbf{R}$  et que

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} |f'(x)| \leq 2\sqrt{M_0 M_2}.$$

**Exercice 7 (\*)** On pose  $f(x) = x^8 + 5x^6 - 6x^3$ . Donner un équivalent simple de  $f$  lorsque  $x$  tend vers 0,  $+\infty$ , 2, et 1.

**Exercice 8** Donner un équivalent simple des fonctions suivantes en 0 et en  $+\infty$  :

- |  |                                 |                                    |
|--|---------------------------------|------------------------------------|
| 1. (*) $f_1(x) = x + \cos x,$          | 4. $f_4(x) = x + \sin x,$       | 7. $f_7(x) = x^4 + e^x,$           |
| 2. (*) $f_2(x) = x^2 + \sin x,$        | 5. $f_5(x) = \sqrt{x} + \ln x,$ | 8. $f_8(x) = e^{2x} - \sqrt{x},$   |
| 3. (*) $f_3(x) = \operatorname{sh} x,$ | 6. $f_6(x) = xe^x,$             | 9. $f_9(x) = \operatorname{ch} x.$ |

**Exercice 9 (\*)** Étudier la limite de  $f$  en  $a$  lorsque

- |   |   |
|---|---|
| (a) $f(x) = \frac{x^2+x-1}{2x(x-3)}$ et $a = +\infty,$                                | (d) $f(x) = \frac{x^2+3\ln(x)}{2x^2\sqrt{1+x}}$ et $a = +\infty,$ |
| (b) $f(x) = (\pi - 2x) \tan(x)$ et $a = \frac{\pi}{2},$                               |   |
| (c) $f(x) = \frac{x^2-3x}{x^3+2x^2} - \frac{x^3-x}{\sqrt{x^4+x^3}}$ et $a = +\infty,$ | (e) $f(x) = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{e}}{\ln(x)-1}$ et $a = e.$       |

**Exercice 10** Établir pour chacune des fonctions  $f$  proposées ci-dessous un développement limité de  $f$  en 0 à l'ordre  $n$  proposé :

- (a) (\*)  $f(x) = e^{-x}$  et  $n = 5$ , (g)  $f(x) = \ln(1 + x^2)$  et  $n = 6$ ,  
 (b) (\*)  $f(x) = \ln(1 + \operatorname{sh} x)$  et  $n = 4$ , (h)  $f(x) = \sin(2x) + \cos(x^2)$  et  $n = 7$ ,  
 (c) (\*)  $f(x) = \frac{1}{2+x}$  et  $n = 3$ , (i)  $f(x) = e^{3x} \sin(2x)$  et  $n = 4$ ,  
 (d) (\*)  $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{e^x \sin x}$  et  $n = 2$ , (j)  $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}$  et  $n = 3$ ,  
 (e) (\*)  $f(x) = (1+x)^{1/x}$  et  $n = 3$ , (k)  $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$  et  $n = 3$ ,  
 (f) (\*)  $f(x) = \operatorname{sh}\left(\frac{x}{1+x}\right)$  et  $n = 4$ ,

**Exercice 11** Calculer les limites suivantes :

- (a) (\*)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$  (e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$   
 (b) (\*)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x + \ln(\cos x)}{x^4}$  (f)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$ ,  $a \in \mathbb{R}^*$   
 (c) (\*)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2}$  (g) (\*)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$   
 (d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(2x))}{\ln(\cos(3x))}$  (h) (\*)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{\sqrt{x}}$ .

**Exercice 12** On définit les fonctions

$$f : x \in ]-1, 1[ \mapsto \ln(1 - x^2) \text{ et } g : x \in \mathbf{R} \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} - 1.$$

- Déterminer les développements limités de  $f$  et de  $g$  à l'ordre 5, quand  $x$  tend vers 0.
- En déduire l'existence d'un réel  $\eta > 0$  tel que pour tout  $x \in ]-\eta; 0[ \cup ]0; \eta[$ ,

$$f(x) < g(x).$$

**Exercice 13** Calculer un développement limité ou asymptotique de  $f$  dans les cas suivants :

- (\*)  $f(x) = \sqrt{2+x}$  en 0, à l'ordre 3,
- (\*)  $f(x) = \ln(\sin x)$  en  $\frac{\pi}{2}$ , à l'ordre 3,
- (\*)  $f(x) = \arctan\left(\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}\right)$  au voisinage de  $+\infty$  avec trois termes significatifs,
- $f(x) = x^2 \ln x$  où  $x$  tend vers 1 et à l'ordre 5,

- $f(x) = \ln(2+x)$  en 0, à l'ordre 2,
- $f(x) = \sin x$  en  $\frac{\pi}{4}$ , à l'ordre 3,
- $f(x) = \sqrt{x^4 + x + 1}$  au voisinage de  $+\infty$  avec trois termes significatifs.

**Exercice 14** (\*) Calculer les limites des suites de terme général

- $u_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1}$       3.  $u_n = \left(\sin \frac{1}{n}\right)^{1/n}$
- $u_n = \frac{n - \sqrt{n^2 - 1}}{n + \sqrt{n^2 + 1}}$       4.  $u_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$

**Exercice 15** (\*)

- Trouver un équivalent simple pour les suites définies par

$$u_n = \sin \frac{1}{n+1} \text{ et } v_n = \ln \sin \frac{1}{n}.$$

- Trouver un développement asymptotique à la précision  $1/n^2$  des suites données par

$$u_n = \ln(n+1) \text{ et } v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Donner aussi un développement à la précision  $1/n$  de la suite donnée par

$$w_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}.$$