Feuille n° 2 : Matrices

Exercice 1 (∗) Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$.
Parmi les produits AB, BA, AC, CA, BC, CB, lesquels ont un sens ? Calculez-les.

Exercice 2 On considère les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -6 & 7 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 & 7 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \\ 1 & 6 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer AB et BA. Que remarque-t-on ?

Exercice 3

1. À tout nombre réel t on associe la matrice $A(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(t) & \mathrm{sh}(t) \\ \mathrm{sh}(t) & \mathrm{ch}(t) \end{pmatrix}$.
   (a) Pour $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$, montrer que $A(t_1)A(t_2) = A(t_1 + t_2)$.
   (b) Montrer que $A(t)$ est inversible pour tout $t \in \mathbf{R}$ et calculer $(A(t))^{-1}$.
2. Mêmes questions avec la matrice $A(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$.

Exercice 4

1. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que $AB = AC$; a-t-on $B = C$? A peut-elle être inversible ?
   (b) Déterminer toutes les matrices F telles que $AF = 0$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer toutes les matrices B telles que $BA = I_2$.

Exercice 5 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Exercice 6 Soit $A = \begin{pmatrix} 13 & -8 & -12 \\ 12 & -7 & -12 \\ 6 & -4 & -5 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbf{N}$. Montrer ensuite que A est inversible et calculer A^n pour tout $n \in \mathbf{Z}$.

Exercice 7 (∗)

1. Soit $n \geq 1$ un entier et $A, B \in M_n(\mathbf{R})$ telles que $AB = BA$. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a
$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}.$$
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout $n \geq 3$.

Exercice 8 Soit m un réel non nul. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & m & m^2 \\ 1/m & 0 & m \\ 1/m^2 & 1/m & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(A + I)(A - 2I)$.
2. Soit $B = \frac{1}{3}(A+I)$ et $C = \frac{1}{3}(A-2I)$. Calculer B^2 et C^2. En déduire une expression simple de B^n et C^n pour tout entier $n \geq 1$.
3. En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, $A^n = 2^n B + (-1)^{n+1} C$.

Exercice 9 Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $A^2 = 2I - A$. En déduire que A est inversible, et calculer A^{-1}.

Exercice 10 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2, A^3 et $A^3 - A^2 + A - I$.
2. Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de I, A et A^2.
3. Exprimer A^4 et A^5 en fonction de I, A, et A^2.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{Z}$, il existe a_n, b_n, c_n tels que $A^n = a_n I + b_n A + c_n A^2$.

Exercice 11 Soient A et B deux matrices carrées $n \times n$ telles que $AB = A + I_n$. Montrer que A est inversible et déterminer son inverse (en fonction de B).

Exercice 12 Soit A, B deux matrices carrées telles que $AB = A + B$. Montrer que A et B commutent.

Exercice 13 Soit n un entier, K un corps et A une matrice telle que pour tout $B \in M_n(K)$ on ait $AB = BA$. Montrer qu'il existe $\lambda \in K$ tel que $A = \lambda I$.

Exercice 14 $(*)$ Les matrices suivantes sont-elles échelonnées ?

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-12&0\\0&0&47\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&1\\0&1&0\\3&4&0\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&15&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&4&0&0\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&1&0\\-1&2&1\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}0&1&1&3\\0&0&-2&4\\0&0&0&2\end{pmatrix}.$$

Exercice 15 $(*)$ Mettre les matrices suivantes sous forme échelonnée (en lignes) :

$$A=\begin{pmatrix}1&1&3&10&1\\1&2&1&4&7\\1&3&4&13&8\\1&4&2&7&14\end{pmatrix} ; B=\begin{pmatrix}1&-1&2&2\\2&1&-1&2\\1&1&0&2\\0&1&1&2\end{pmatrix} ; C=\begin{pmatrix}0&0&2&1\\0&1&-1&0\\-1&0&3&1\\0&-1&-2&-1\end{pmatrix}.$$

Exercice 16 $(*)$ Calculer, lorsqu'ils existent, les inverses des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&2&1\\1&2&-1\\-2&-2&-1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&\bar\alpha&\bar\alpha^2\\\alpha&1&\bar\alpha\\\alpha^2&\alpha&1\end{pmatrix}(\alpha\in\mathbf{C}) \qquad \begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&\cdots&\cdots&1\\0&1&\ddots&&\vdots\\&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\&\cdots&0&1&1\\0&&\cdots&0&1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&2&3&\cdots&n\\0&1&2&\cdots&\vdots\\&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&&0&1&2\\0&\cdots&&0&1\end{pmatrix}$$

Exercice 17 $(*)$ Déterminer sous quelles conditions les systèmes suivants admettent une solution :

$$\begin{cases}x-y+2z+2t=a\\2x+y-z+2t=b\\x+y+2t=c\\y+z+2t=d\end{cases} ; \begin{cases}y+z=a\\x+z=b\\x+t=c\end{cases}$$

Exercice 18 Résoudre, en fonction du paramètre $m\in\mathbf{C}$, les systèmes suivants d'inconnues complexes :

$$\begin{cases}x-y+z=m\\x+my-z=1\\x-y-z=1\end{cases} ; \begin{cases}mx+y+z=1\\x+my+z=m\\x+y+mz=m^2\end{cases} ; \begin{cases}mx+y+z+t=1\\x+my+z+t=m\\x+y+mz+t=m+1\end{cases}$$

Exercice 19 $(*)$
Déterminer noyau et image des matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\3&4&1\\5&6&1\\7&8&1\end{pmatrix} ; B=\begin{pmatrix}2&2&-1&7\\4&3&-1&11\\0&-1&2&-4\\3&3&-2&11\end{pmatrix}.$$

Exercice 20

1. On considère l'application linéaire $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ définie par
$$f(x,y)=(x-y,-3x+3y).$$
Écrire sa matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$ et déterminer son noyau et son image.
2. Même question avec $g:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ définie par
$$g(x,y,z)=(x-z,2x+y-3z,-y+2z).$$
3. Même question avec $h:\mathbf{R}^4\to\mathbf{R}^4$ définie par
$$h(x,y,z,t)=(2x+2y-z+7t,4x+3y-z+11t,-y+2z-4t,3x+3y-2z+11t).$$