Feuille n° 10 : applications linéaires et matrices, changement de base

Exercice 1 Soit E un espace vectoriel de dimension 3, muni d'une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$. On considère l'endomorphisme u de E dont la matrice dans $\mathscr{B}$ est

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $u^2 = 3u$.
2. Déterminer une base de $\operatorname{Im} u$ et une base de $\ker u$.
3. Montrer que $E = \operatorname{Im} u \oplus \ker u$.
4. Écrire la matrice de u dans une base adaptée à cette somme directe.
5. Déterminer la matrice dans la base canonique du projecteur sur $\ker u$ parallèlement à $\operatorname{Im} u$.

Exercice 2 Soit u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $\ker u$ est une droite, et en donner une base a.
2. On note $b = (1, 1, 1)$ et $c = (1, 2, 0)$. Montrer que (a, b, c) est une base de $\mathbf{R}^3$ et expliciter la matrice de u dans cette base.
3. On note E le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ engendré par b et c.
   (a) On note $v = u_{|E} : E \to \mathbf{R}^3$. Expliciter la matrice de v de (b, c) dans (a, b, c).
   (b) Montrer que cela a un sens de considérer $w : E \to E$ l'induit de u sur E, et écrire la matrice de w dans la base (b, c).

Exercice 3 (∗) Soit E un espace de dimension 3, et $e = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On note $f = (f_1, f_2, f_3)$, où

$$f_1 = e_1 + 2e_2 - 2e_3, f_2 = 4e_1 + 7e_2 - 6e_3, f_3 = -3e_1 - 5e_2 + 5e_3.$$

1. Montrer que f est une base de E, et écrire la matrice de passage de e vers f.
2. Soit $v \in E$ le vecteur de matrice $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ dans f. Quelle est sa matrice dans e ?
3. Soit $w \in E$ le vecteur de matrice $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ dans e. Quelle est sa matrice dans f ?

Exercice 4 Soit u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbf{R}^3$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que u est un automorphisme de $\mathbf{R}^3$ et déterminer u^{-1}.
2. Déterminer une base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de $\mathbf{R}^3$ telle que $u(\varepsilon_1) = \varepsilon_1$, $u(\varepsilon_2) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ et $u(\varepsilon_3) = \varepsilon_2 + \varepsilon_3$.
3. Déterminer la matrice de passage P de (e_1, e_2, e_3) à $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, ainsi que P^{-1}.
4. En déduire $u^n(e_1)$, $u^n(e_2)$ et $u^n(e_3)$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$.

Exercice 5 On définit l'application linéaire $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ par :

$$u(x, y, z) = (x + 6y - z, x + z, x - 3y + 2z).$$

1. Écrire la matrice A de u dans la base canonique.
2. Donner une base et une équation de $\operatorname{Im} u$.
3. Montrer que les sous-espaces vectoriels $\ker u$ et $\ker(u - 3\,\mathrm{id})$ sont de dimension 1 et en donner des bases.

4. Calculer la matrice de u^2 dans la base canonique et en déduire que $\ker u^2$ est un sous-espace de dimension 2.
5. Construire une base (f_1, f_2, f_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que f_1 soit une base de $\ker(u - 3\,\mathrm{id})$, f_2 une base de $\ker u$ et (f_2, f_3) une base de $\ker u^2$. Comment s'écrit la matrice B de u dans cette nouvelle base ?
6. Quelle est la matrice, dans la base (f_1, f_2, f_3), du projecteur sur $\ker(u-3\,\mathrm{id})$ parallèlement à $\ker u^2$? Même question avec le projecteur sur $\ker u^2$ parallèlement à $\ker(u - 3\,\mathrm{id})$. Comment trouver les matrices de ces projecteurs, dans la base canonique cette fois ?

Exercice 6 Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et f un endomorphisme de E tel que $f \neq 0$, mais $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. Montrer que $\operatorname{Im} f$ est inclus dans $\ker f$ et en déduire le rang de f.
2. Soit e_3 un vecteur de E tel que $f(e_3) \neq 0$. On pose $e_2 = f(e_3)$. Montrer qu'on peut choisir un vecteur e_1 dans $\ker f$ non colinéaire avec e_2.
3. En déduire que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E et écrire la matrice de f dans cette base.
4. (Exemple) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est
$$A = \begin{pmatrix} -3 & -6 & 3 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$
Vérifier que $A^2 = 0$, choisir les vecteurs e_1, e_2 et e_3 comme ci-dessus et écrire la matrice de passage de la base canonique vers la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

Exercice 7 Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donnée par $f(x, y, z) = (-x + y + z, -6x + 4y + 2z, 3x - y + z)$.

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et vérifier que $A^2 = 2A$.
3. Montrer que si $v \in \operatorname{Im} f$, alors $f(v) = 2v$.
4. Montrer que $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires.
5. Déterminer une base de $\ker f$ et une base de $\operatorname{Im} f$. Si $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ formée par la réunion de ces bases, écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 8 On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est donnée par
$$A = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$
Soient $e'_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3$, $e'_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3$ et $e'_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$.

1. Montrer que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer la matrice B de f dans la base $\mathcal{B}'$ en calculant directement $f(e'_1), f(e'_2), f(e'_3)$.
3. Écrire la matrice de passage (que l'on notera P) de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. Calculer P^{-1}.
4. Écrire la formule générale reliant A, B et P et faire la vérification de la formule obtenue.
5. Calculer B^4 et A^4

Exercice 9 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soient p et q des projecteurs de E.

1. Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
2. Montrer qu'on a alors $\operatorname{Im}(p + q) = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q$ et $\ker(p + q) = \ker p \cap \ker q$.