

Feuille n° 1 : Révisions

Nombres réels et suites

Exercice 1 (*) Déterminer (lorsqu'ils existent) les bornes inférieures et supérieures ainsi que les maxima et minima de chacun des ensembles suivants :

$$A = \{x \in \mathbf{R} : x^2 < 2\} ; B = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}^* \right\} ; C = \left\{ \frac{1}{n} - \frac{1}{p} : n, p \in \mathbf{N}^* \right\}.$$

Exercice 2

- Pour $x, y \in \mathbf{R}_+^*$, montrer que $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$.
- Déterminer $\inf \left\{ (x_1 + \dots + x_n) \times \left(\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) : x_1, \dots, x_n \in \mathbf{R}^{+*} \right\}$. Cet infimum est-il un minimum ?

Exercice 3 Soit $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ une application bornée. Montrer que

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} \inf_{y \in \mathbf{R}} f(x, y) \leq \inf_{y \in \mathbf{R}} \sup_{x \in \mathbf{R}} f(x, y).$$

Exercice 4 (*) Soit $f : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ une application croissante.

- Montrer que l'ensemble $E = \{x \in [0; 1] \mid f(x) \leq x\}$ admet une borne inférieure b .
- Montrer que $f(b) = b$.

Exercice 5 (*) Déterminer la nature et la limite éventuelle des suites u, v et w de termes généraux

$$u_n = \frac{\ln(n!)}{n^2} ; v_n = e^{-\sqrt{n}} \ln(1 + n + e^n) \text{ et } w_n = \sqrt{n} \ln \left(\frac{\sqrt{n} + 1}{\sqrt{n} - 1} \right).$$

Exercice 6 Montrer que la suite de terme général $w_n = \cos \left(\left(n + \frac{1}{n} \right) \pi \right)$ diverge.

Exercice 7 Étudier la suite définie récursivement par $u_0 \in \mathbf{C}$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{5} (3u_n - 2\bar{u}_n)$.

Exercice 8 Soit $a \in \mathbf{C}$ et $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbf{C}$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = au_n^2$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur u_0 pour que la suite (u_n) converge vers 0.

Exercice 9 Soit $u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

- On suppose que les suites extraites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers la même limite. Montrer que u converge.
- Donner un exemple de suite telle que $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent mais pas $(u_n)_n$.
- On suppose que les suites extraites $(u_{2n})_n, (u_{2n+1})_n$ et $(u_{3n})_n$ convergent. Montrer que u converge.

Exercice 10 (*) Soit u une suite. On définit une suite S par $S_n = \frac{u_0 + \dots + u_n}{n+1}$.

- (a) On suppose que u tend vers 0. Montrer qu'alors $S_n \rightarrow 0$.
(b) En déduire que, si u est convergente, alors S converge et a la même limite que u .
- Si $u_n = (-1)^n$, montrer que la suite S converge.
- Si $u_n \rightarrow +\infty$, montrer que $S_n \rightarrow +\infty$.

Continuité et dérivabilité

Exercice 11 Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ une fonction continue. On suppose qu'il existe $\ell \in [0, 1[$ tel que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell$. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 12 Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tel que $a < b$. Soit $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ deux fonctions continues. On suppose que pour tout $x \in [a, b], f(x) > g(x) > 0$. Montrer qu'il existe $k > 1$ tel que pour tout $x \in [a, b], f(x) \geq kg(x)$.

Exercice 13 (*) Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue telle que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f admet un minimum global sur \mathbf{R} .

Exercice 14

- Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}, |\sin x| \leq |x|$.
- (a) Montrer que pour tout $x > 0, \frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}$.
(b) On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ par : pour tout $n \in \mathbf{N}^*, u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Déduire de la question précédente que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 15

1. Montrer que $x \mapsto x \ln x$ est uniformément continue sur $]0, 1]$.
2. Montrer que $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur \mathbf{R}_+ .
3. Montrer que $x \mapsto \ln x$ n'est pas uniformément continue sur \mathbf{R}_+^* .
4. Soit $f :]0, 1[\rightarrow \mathbf{R}$ uniformément continue. Montrer que f est bornée.

Exercice 16 Déterminer en quels points les fonctions suivantes sont dérivables et calculer leur dérivée.

$$f_1 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto (1 + |x|)e^{-|x|} \quad ; \quad f_2 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 17 (*) Soit $n \in \mathbf{Z}$. On définit $f_n : \mathbf{R}^* \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto x^n \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. À quelle condition sur n la fonction f_n est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
2. À quelle condition sur n ce prolongement est-il dérivable en 0 ?
3. À quelle condition sur n cette dérivée est-elle continue en 0 ?

Exercice 18 (*)

1. Montrer que l'équation (E) : $2 \ln x - x + 2 = 0$ en $x \in \mathbf{R}_+^*$ admet une unique solution sur $[2, +\infty[$.

On note a cette solution. Vérifier que de plus $a \in]5, 6]$.

2. Afin de déterminer une approximation de a , on introduit la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par $u_0 = 5$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \varphi(u_n)$, où $\varphi : [2, +\infty[\rightarrow [2, +\infty[$ est définie par $\varphi(x) = 2 \ln x + 2$ pour tout $x \geq 2$.

- i. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \in [5, 6]$.
- ii. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est croissante.
- iii. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est convergente et que sa limite est a .

- i. Montrer que, pour tout $x \in [5, 6]$, $|\varphi'(x)| \leq \frac{2}{5}$.
- ii. En déduire que, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$|u_{n+1} - a| \leq \frac{2}{5} |u_n - a|.$$

- iii. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|u_n - a| \leq \left(\frac{2}{5}\right)^n$.

- (c) Déterminer un entier n tel que u_n soit une valeur approchée de a à 10^{-3} près.

Fonctions trigonométriques

Exercice 19 (*) Calculer les quantités suivantes :

1. $\text{Arcsin}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
2. $\text{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$
3. $\text{Arctan}\left(\tan\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)$
4. $\text{Arctan}\left(\tan\left(\frac{4\pi}{7}\right)\right)$
5. $\text{Arccos}\left(\cos\left(\frac{82\pi}{11}\right)\right)$
6. $\text{sh}(\text{Argsh}(1))$
7. $\text{Argch}(\text{ch}(1 - \ln 5))$.

Exercice 20 Soit a et b deux réels strictement positifs. On note θ l'argument du nombre complexe $a + ib$ qui vérifie $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

1. Avec un argument géométrique, montrer que $\theta = \text{Arctan}\frac{b}{a}$.
2. En déduire que le réel $\text{Arctan}\frac{1}{2} + \text{Arctan}\frac{1}{5} + \text{Arctan}\frac{1}{8}$ est un argument du nombre complexe $(2 + i)(5 + i)(8 + i)$.
3. Calculer également les parties réelle et imaginaire de $(2 + i)(5 + i)(8 + i)$ et en déduire une expression simple de $\text{Arctan}\frac{1}{2} + \text{Arctan}\frac{1}{5} + \text{Arctan}\frac{1}{8}$.

Exercice 21

1. Calculer $\text{ch}\left(\frac{1}{2} \ln(3)\right)$ et $\text{sh}\left(\frac{1}{2} \ln(3)\right)$.
2. Utiliser le résultat pour trouver les solutions réelles de l'équation :

$$2 \text{ch}(x) + \text{sh}(x) = \sqrt{3} \text{ch}(5x).$$

Exercice 22 Résoudre le système suivant d'inconnues réelles x et y :

$$\begin{cases} \text{ch}(x) + \text{ch}(y) = 3 \\ \text{sh}(x) + \text{sh}(y) = 2 \end{cases}.$$

Exercice 23 (*) Linéarisation

1. Soit $u \in \mathbf{R}$. Exprimer $\text{ch}^5(u)$ en fonction de puissances de e^u puis en fonction de termes du type $\text{ch}(ku)$, $k \in \mathbf{N}$.
2. Même question avec $\text{sh}^4(u)$.

Exercice 24 Montrer que l'équation $\text{Argsh } x + \text{Argch } x = 1$ admet une unique solution réelle, puis la déterminer.

Exercice 25 (*) On considère la fonction $f : x \mapsto \text{Arcsin} \frac{x+1}{\sqrt{2(x^2+1)}}$.

1. Quels sont les domaines de définition, de continuité et de dérivabilité de f ?
2. Calculer f' là où elle est définie et en déduire une expression plus simple de f .
3. Représenter le graphe de f .