Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre de printemps 2018-2019

Cursus préparatoire : Fondamentaux des Mathématiques 2 — Jeudi 2 mai 2019

Devoir surveillé n°4 bis
Durée : 1h30

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les réponses aux exercices doivent donc être clairement rédigées. Le détail des calculs doit apparaître sur la copie. La présentation doit être la plus soignée possible. **Enfin, si vous pensez avoir repéré une erreur d'énoncé, signalez-le sur la copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.**

Exercice 1 EPITA 2003 Dans ce problème, on étudie, pour $n \in \mathbf{N}$, la suite d'intégrales

$$u_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)dt.$$

1. (a) Calucler les trois premiers termes de la suite.

$u_0 = [t]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} = \pi$, $u_1 = [\sin]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} = 2$, $u_2 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2t)}{2}dt = [\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$.

(b) Établir à l'aide d'une intégration par parties que $(n+1)u_{n+1} = nu_{n-1}$ pour $n \geqslant 1$.

On intègre par parties en posant, pour $n \geqslant 1$, $\cos^{n+1} = \cos^n \times \cos$, les fonctions $\cos^n$ et sin étant C^1 sur $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$, $(n+1)u_{n+1} = (n+1)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\cos(t)dt = (n+1)[\cos^n(t) \times \sin(t)]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} + n(n+1)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1}(t)\sin^2(t)dt = n(n+1)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1}(t)(1-\cos^2(t))dt = n(n+1)(u_{n-1} - u_{n+1})$. Donc $(n+1)u_{n+1} = nu_{n-1}$ pour $n \geqslant 1$.

(c) En déduire que la suite de terme général $\big((n+1)u_n u_{n+1}\big)_{n\in\mathbf{N}}$ est constante et en préciser la valeur.

En multipliant par u_n l'égalité précédente, la suite $(n+1)u_n u_{n+1}$ est constante. Comme $u_0u_1 = 2u_1u_2 = 2\pi$.

(d) Étudier le sens de variation de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et en déduire que

$$nu_n^2 \leqslant 2\pi \leqslant (n+1)u_n^2.$$

Comme $0 \geqslant \cos(t) \geqslant 1$ pour tout $t \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$, la suite $\big(\cos^n(t)\big)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante et $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ également. On a donc $nu_n^2 \leqslant nu_nu_{n-1} = 2\pi$ et $(n+1)^2u_n \geqslant (n+1)u_nu_{n+1} = 2\pi$ d'où l'encadrement

$$nu_n^2 \leqslant 2\pi \leqslant (n+1)u_n^2$$

(e) En déduire que $u_n \sim \sqrt{\frac{2\pi}{n}}$ quand n tend vers $+\infty$.

En prenant la racine carrée, on obtient

$$\sqrt{\frac{2\pi}{n+1}} \leqslant u_n \leqslant \sqrt{\frac{2\pi}{n}}.$$

---

2. On étudie maintenant les intégrales des fonctions f_n définies sur $\mathbf{R}$ par $f_n(x) = \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n$ pour $x \in [-\sqrt{n}, \sqrt{n}]$ et $f_n(x) = 0$ pour $|x| > \sqrt{n}$.
   (a) Établir que $\int_{-\sqrt{n}}^{+\sqrt{n}} f_n = \sqrt{n} u_{2n+1}$.

Le changement de variable $x = \sqrt{n}\sin(t)$, qui est C^1 et bijectif de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-\sqrt{n}, \sqrt{n}]$ donne $dx = \sqrt{n}\cos(t)dt$ et $\int_{-\sqrt{n}}^{+\sqrt{n}} f_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{n\sin^2(t)}{n}\right)^n \sqrt{n}\cos(t)dt = \sqrt{n} u_{2n+1}$.

   (b) À l'aide de l'équivalent de u_n, en déduire $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{-\sqrt{n}}^{+\sqrt{n}} f_n$.

Comme $u_{2n+1} \sim \sqrt{\frac{2\pi}{2n+1}}$, $\int_{-\sqrt{n}}^{+\sqrt{n}} f_n = \sqrt{n} u_{2n+1} \sim \sqrt{\pi}$ quand n tend vers l'infini, donc la suite converge vers $\sqrt{\pi}$.

---

3. Dans cette question, on étudie l'intégrale de la limite de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
   (a) Déterminer, pour $x \in \mathbf{R}$ fixé, la limite $f(x)$ de $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbf{N}}$ quand n tend vers l'infini.

Pour tout $x \in \mathbf{R}$ fixé, et un entier $n > x^2$, $f_n(x) = \exp\big(n\ln(1 - \frac{x^2}{n})\big)$. Mais $\ln(1-u) = u + o(u)$ donc $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \big(n\ln(1 - \frac{x^2}{n})\big) = -x^2$ et $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x) = e^{-x^2}$.

   (b) Justifier l'inégalité $\ln(1-u) \leqslant -u$ pour $u \in [0, 1[$. En déduire l'inégalité $f_n(x) \leqslant f(x)$ pour tout réel x.

La fonction $u \mapsto u + \ln(1-u)$ a comme valeur 0 en 0 et comme dérivée $u \mapsto 1 - \frac{1}{1-u}$. Or $0 \leqslant u < 1 \iff 1 \leqslant \frac{1}{1-u} \iff 0 \geqslant 1 - \frac{1}{1-u}$ donc cette fonction est décroissante et reste négative. Donc pour $n > x^2$, $\ln(1 - \frac{x^2}{n}) \leqslant -\frac{x^2}{n}$ soit $\ln(1 - \frac{x^2}{n})^n \leqslant -x^2$ et $f_n(x) \leqslant \exp(-x^2)$, et qui plus est pour $n < x^2$, $f_n(x) = 0 < \exp(-x^2)$.

On peut ensuite, par des théorèmes de deuxième année, justifier la valeur de l'intégrale de la gaussienne : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.