Corrigé du devoir surveillé n°4
(Durée : 1h30)

Exercice 1

1. Décomposer en éléments simples sur **R** puis sur **C** la fraction rationnelle
$$A(X) = \frac{X^3 + X}{X^2 + 3} \ .$$
2. Décomposer en éléments simples sur **R** la fraction rationnelle
$$B(X) = \frac{3X - 1}{X^2(X + 1)^2} \ .$$

Corrigé :

1. Par division euclidienne, on obtient
$$\boxed{A(x) = X + \frac{-2X}{X^2 + 3}.}$$
Sur **R**, ces termes sont déjà des éléments simples. Sur **C**, il faut décomposer le deuxième terme : il existe $a \in \mathbf{C}$ tel que
$$\frac{-2X}{X^2 + 3} = -\frac{2X}{(X - \sqrt{3}i)(X + \sqrt{3}i)} = \frac{a}{X - \sqrt{3}i} + \frac{\bar{a}}{X + \sqrt{3}i}.$$
Pour calculer a, il suffit de multiplier l'équation par $X - \sqrt{3}i$ et de l'évaluer en $X = \sqrt{3}i$. On trouve ainsi que $a = -1$ et
$$\boxed{A(x) = X + \frac{-1}{X - \sqrt{3}i} + \frac{-1}{X + \sqrt{3}i}.}$$
2. Il existent a, b, c, d en **R** tells que
$$B(X) = \frac{3X - 1}{X^2(X + 1)^2} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X^2} + \frac{c}{X + 1} + \frac{d}{(X + 1)^2}.$$
En multipliant cet équation par X^2 et en calculant en $X = 0$, on obtient $b = -1$. En multipliant l'équation par $(X + 1)^2$ et en calculant en $X = -1$, on obtient $d = -4$. En multipliant par X et en prenant la limite quand $X \to \infty$, on voit que $a + c = 0$. En calculant en $X = 1$, on obtient $2a + c = 5$. Donc $a = 5$, $c = -5$ et
$$\boxed{B(X) = \frac{5}{X} + \frac{-1}{X^2} + \frac{-5}{X + 1} + \frac{-4}{(X + 1)^2}.}$$

Exercice 2

Calculer la limite quand $n \to +\infty$ de la suite suivante :
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2 + 3n^2} \ .$$

Corrigé : Pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a
$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(\frac{k}{n}\right)^2 + 3} \ .$$

Il s'agit d'une somme de Riemann correspondant à l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{1}{x^2+3} dx \ .$$

Comme la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2+3}$ est continue, on a

$$\lim_{n\to\infty} u_n = I \ .$$

Calculons I. En faisant le changement de variables $y = x/\sqrt{3}$ on obtient

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{\sqrt{3}}{3\,(y^2+1)} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \Big[\arctan(y) \Big]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \ . \end{aligned}$$

De plus, $\tan(\pi/6) = \frac{1}{\sqrt{3}}$, d'où

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{\pi}{6\sqrt{3}} \ .}$$

Exercice 3 Calcul d'intégrales :

$$F_1 = \int_0^{2\pi} x\sin(x) dx$$

On applique la formule d'intégration par parties : on a $\sin(x) = (-\cos(x))'$ donc

$$\begin{aligned} F_1 &= \Big[-x\cos(x) \Big]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos(x) dx \\ &= -2\pi + \Big[\sin(x) \Big]_0^{2\pi} \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{F_1 = -2\pi} \ .$$

$$F2 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+x+\frac{1}{2}} dx \ .$$

On écrit la forme canonique du dénominateur :

$$x^2 + x + \frac{1}{2} = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\left((2x+1)^2+1\right) \ .$$

On fait donc le changement de variables $y = 2x+1$. On a $dy = 2dx$ et $x = \frac{y-1}{2}$, donc

$$\begin{aligned} F_2 &= \int_1^3 \frac{y-1}{\frac{2}{4}\,(y^2+1)} \frac{dy}{2} \\ &= \int_1^3 \frac{y}{y^2+1} dy - \int_1^3 \frac{1}{y^2+1} dy \\ &= \frac{1}{2} \Big[\ln(y^2+1) \Big]_1^3 - \Big[\arctan(y) \Big]_1^3 \end{aligned}$$

et comme $\arctan(1) = \pi/4$,

$$\boxed{F_2 = \frac{1}{2}\ln(5) - \arctan(3) + \frac{\pi}{4}\ .}$$

$$F_3 = \int_0^{\sqrt{2}} \ln(x^2+1)dx\ .$$

On fait une intégration par parties, avec $u' = 1$ et $v = \ln(x^2+1)$.

$$\begin{aligned} F_3 &= \Big[x\ln(x^2+1)\Big]_0^{\sqrt{2}} - \int_0^{\sqrt{2}} \frac{x \times 2x}{x^2+1}dx \\ &= \sqrt{2}\ln(3) - \int_0^{\sqrt{2}} \left(2 - \frac{2}{x^2+1}\right) dx \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{F_3 = \sqrt{2}\ln(3) - 2\sqrt{2} + 2\arctan(\sqrt{2})\ .}$$

$$F_4 = \int_0^1 x\sqrt{1+x}dx\ .$$

On fait apparaitre $(x+1)\sqrt{x+1} = (x+1)^{3/2}$.

$$\begin{aligned} F_4 &= \int_0^1 \left((x+1)^{3/2} - \sqrt{x+1}\right) dx \\ &= \left[\frac{2}{5}(x+1)^{5/2} - \frac{2}{3}(x+1)^{3/2}\right]_0^1 \\ &= \frac{2}{5}\left(\sqrt{2^5} - 1\right) - \frac{2}{3}\left(\sqrt{2^3} - 1\right) \end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{F_4 = \frac{4}{15}\left(1 + \sqrt{2}\right)\ .}$$

Exercice 4 (Une somme remarquable)

Soit

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+1}\,dx.$$

1. Montrer que $I_n \to 0$.
2. Pour $n \geqslant 1$, calculer $I_n + I_{n-1}$ et montrer que

$$I_n = (-1)^n \left(I_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)$$

Attention, erreur de signe dans l'énoncé, remplacer $(-1)^{k+1}$ par $(-1)^k$.

3. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} = \ln 2$. **Aussi une erreur de signe .**

Corrigé :

1. Pour $x \in [0,1]$ on a

$$0 \leqslant \frac{x^n}{x+1} \leqslant x^n,$$

et en intégrant les termes de cette inégalité, on obtient

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n},$$

d'où

$$\lim_{n\to\infty} I_n = 0.$$

2. Pour $n \geqslant 1$,

$$I_n + I_{n-1} = \int_0^1 \frac{x^n + x^{n-1}}{x+1}\, dx = \in_0^1 \frac{x^{n-1}(x+1)}{x+1} dx = \int_0^1 x^{n-1}\, dx,$$

d'où

$$\boxed{I_n + I_{n-1} = \frac{1}{n}}.$$

Il y a une erreur dans l'énoncé ; il faut remplacer $(-1)^{k+1}$ par $(-1)^k$. démontrons que

$$I_n = (-1)^n \left(I_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} \right)$$

Pour obtenir la formule de I_n, on raisonne par récurrence. On a

$$I_1 = -I_0 + 1 = (-1)^1 \left(I_0 + \sum_{i=1}^{1} \frac{(-1)^k}{k} \right) .$$

Soit $n \geqslant 2$ et supposons que

$$I_{n-1} = (-1)^{n-1} \left(I_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k} \right) .$$

Alors

$$I_n = -I_{n-1} + \frac{1}{n} = (-1)^n \left(I_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k} \right) + (-1)^{2n} \frac{1}{n},$$

donc

$$\boxed{I_n = (-1)^n \left(I_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} \right).}$$

3. En utilisant la formule précédente et en sachant que $I_n \to 0$ quand $n \to \infty$, on voit que

$$lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} = -I_0.$$

Mais

$$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{x+1} = \ln 2,$$

d'où la conclusion

$$\boxed{lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} = -\ln 2.}$$

Il y avait donc aussi une erreur de signe dans l'énoncé.