Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2018-2019

Cursus préparatoire : Fondamentaux des Mathématiques 2

Devoir surveillé n°4

Durée : 1h30

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les réponses aux exercices doivent donc être clairement rédigées. Le détail des calculs doit apparaître sur la copie. La présentation doit être la plus soignée possible. **Enfin, si vous pensez avoir repéré une erreur d'énoncé, signalez-le sur la copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.**

Exercice 1 Décomposer en éléments simples sur $\mathbf{C}$, puis sur $\mathbf{R}$, les fractions rationnelles suivantes :

$$A(X) = \frac{3X-1}{X^2(X+1)^2}; \qquad B(X) = \frac{X}{X^2+3}.$$

Exercice 2 Calculer la limite quand $n \to +\infty$ de la suite suivante :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2+9n^2} .$$

Exercice 3 (Une somme remarquable)

Soit

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+1}\,dx.$$

1. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante et que $I_n \to 0$.
2. Pour $n \geqslant 1$, calculer $I_n + I_{n-1}$ et en déduire une expression de I_n en fonction de I_0.
3. Calculer I_0 et montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} = \ln 2$.

Exercice 4 On considère un endomorphisme u sur un espace vectoriel E.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $\ker(u^n) \subset \ker\left(u^{n+1}\right)$.
2. Montrer que si $\ker(u^n) = \ker\left(u^{n+1}\right)$ alors pour tout $m \geqslant n$ on a $\ker(u^m) = \ker\left(u^{m+1}\right)$. *(On pourra commencer par traiter le cas $m = n+1$)* .

Dans la suite, on suppose que $E = C^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R})$ est l'espace vectoriel des fonctions infiniment dérivables et que u est la dérivation : $u(f) = f'$ pour tout $f \in E$.

3. Décrire $\ker(u)$ et $\ker\left(u^2\right)$. Quels sont leurs dimensions ?
4. Montrer qu'il n'existe pas d'endomorphisme v de E dans E tel que $u = v^2$. *(On pourra montrer que $\ker(v) = \ker(v^2)$ et utiliser la question 2).*