
Devoir surveillé n°3
Durée : 1h30

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les réponses aux exercices doivent donc être clairement rédigées. Le détail des calculs doit apparaître sur la copie. La présentation doit être la plus soignée possible. **Enfin, si vous pensez avoir repéré une erreur d'énoncé, signalez-le sur la copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.**

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et soit $f_A : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application définie par $f_A(M) = AM - MA$ pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Posons

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que f_A est une application linéaire.
2. Ecrire la matrice de f_A dans la base canonique $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
3. On suppose que $a = d$, $c = -b$ et $b \neq 0$.
   (a) Déterminer le noyau et l'image de f_A.
   (b) Montrer que $\mathrm{Ker}(f_A) \cap \mathrm{Im}(f_A) = \{0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}\}$. En déduire que $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(f_A) \oplus \mathrm{Im}(f_A)$.
   (c) Montrer que $f_A^3 = -4b^2 f_A$.
4. On définit $\Psi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ par
   $$\Psi(A) = f_A.$$
   Montrer que Ψ est une application linéaire. De plus, montrer que $\mathrm{Ker}(\Psi) = \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_2)$ où I_2 est la matrice identité dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 2 Lemme de Gronwall

1. Le but de cette question est démontrer le lemme de Gronwall

   Lemma 1 *Soit $I = [a, b[$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose qu'il existe deux constantes $C \geqslant 0$ et $L > 0$ telles que*
   $$f(t) \leqslant C + L \int_a^t f(s)ds, \quad \forall t \in I. \tag{1}$$
   Alors
   $$f(t) \leqslant Ce^{L(t-a)}, \quad \forall t \in I. \tag{2}$$

   Pour obtenir ce résultat, on introduit la fonction $\psi : I \to \mathbb{R}$ définie par
   $$\psi(t) = C + L \int_a^t f(s)ds, \quad \forall t \in I.$$

   (a) Montrer que ψ est dérivable sur I et calculer sa dérivée.
   (b) Montrer que sous (1),
   $$\psi'(t) \leqslant L\psi(t), \quad \forall t \in I.$$
   (c) En déduire que
   $$\psi(t) \leqslant Ce^{L(t-a)}, \quad \forall t \in I.$$
   Indication : calculer la dérivée de $\psi(t)e^{-L(t-a)}$.

(d) Conclure (2) par (a)-(c).

2. On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) \quad y'(t) + \alpha(t) y(t) = 0, t \in]-1, 1[,$$

où $\alpha(t)$ est une fonction continue sur $[-1, 1]$. Disons que $y(t)$ et $y_1(t)$ sont deux solutions non nulles telles que $y_1(0) \neq 0$. On pose $b = y(0)/y_1(0)$.

(a) Expliquer pourquoi $\alpha(t)$ est bornée.

(b) On introduit la fonction $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = (y(t) - b y_1(t))^2.$$

Montrer que

$$f(t) = \int_0^t f'(s) ds \leqslant L \int_0^t f(s) ds, \forall t \in [0, 1[,$$

où $L > 0$ est une constante à préciser/choisir.

(c) En utilisant le Lemme de Gronwall, montrer que

$$f(t) \leqslant 0, \forall t \in [0, 1[.$$

(d) Si on pose $g(t) = f(-t)$ pour $t \in [0, 1[$, montrer que

$$g(t) \leqslant L \int_0^t g(s) ds, \forall t \in [0, 1[,$$

et en déduire que $f(-t) = g(t) \leqslant 0$ pout tout $t \in [0, 1[$.

(e) Conclure que toutes les solution de (E) sont de la forme $t \mapsto \lambda y_1(t)$ pour $t \in]-1, 1[$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Donc l'ensemble des solutions de (E) est un espace vectoriel de dimension 1.