Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre de printemps 2018-2019

Cursus préparatoire : Fondamentaux des Mathématiques 2 — 10 avril 2019

Devoir surveillé n°3
Correction

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les réponses aux exercices doivent donc être clairement rédigées. Le détail des calculs doit apparaître sur la copie. La présentation doit être la plus soignée possible. **Enfin, si vous pensez avoir repéré une erreur d'énoncé, signalez-le sur la copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.**

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et soit $f_A : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application définie par $f_A(M) = AM - MA$ pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Posons

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que f_A est une application linéaire.
   Proof : Soient $M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On va montrer que $f_A(M + \lambda N) = f_A(M) + \lambda f_A(N)$. En effet,

$$\begin{aligned} f_A(M+\lambda N) =& A(M+\lambda N) - (M+\lambda N)A \textit{ par la définition de } f \\ =& AM - MA + \lambda(AN - NA) = f_A(M) + \lambda f_A(N). \end{aligned}$$

   Donc, f_A est une application linéaire.

2. Ecrire $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f_A)$: la matrice de f_A dans la base canonique $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   Solution : On calcule $f_A(E_{11})$, $f_A(E_{12})$, $f_A(E_{21})$ et $f_A(E_{22})$. Voyons que

$$\begin{aligned} f_A(E_{11}) =& AE_{11} - E_{11}A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix} = -bE_{12} + cE_{12} \\ f_A(E_{12}) =& AE_{12} - E_{12}A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} -c & a-d \\ 0 & c \end{pmatrix} = -cE_{11} + (a-d)E_{12} + cE_{22} \\ f_A(E_{21}) =& AE_{21} - E_{21}A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} b & 0 \\ -(a-d) & -b \end{pmatrix} = bE_{11} - (a-d)E_{21} - bE_{22} \\ f_A(E_{22}) =& AE_{22} - E_{22}A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} -c & a-d \\ 0 & c \end{pmatrix} = bE_{12} - cE_{21} \\ \Longrightarrow M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f_A) =& \begin{pmatrix} 0 & -c & b & 0 \\ -b & (a-d) & 0 & b \\ c & 0 & -(a-d) & -c \\ 0 & c & -b & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. On suppose que $a = d$, $c = -b$ et $b \neq 0$.

(a) Déterminer le noyau et l'image de f_A.
Solution : Si $a = d$, $c = -b$ et $b \neq 0$, on a

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} 0 & b & b & 0 \\ -b & 0 & 0 & b \\ -b & 0 & 0 & b \\ 0 & -b & -b & 0 \end{pmatrix}$$

Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on pose $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ et voit que

$$M = xE_{11} + yE_{12} + zE_{21} + tE_{22}.$$

Donc,

$$\begin{aligned} f_A(M) =& f_A(xE_{11} + yE_{12} + zE_{21} + tE_{22}) = xf_A(E_{11}) + yf_A(E_{12}) + zf_A(E_{21}) + tf_A(E_{22}) \\ =& x(-bE_{12} - bE21) + y(bE_{11} - bE22) + z(bE_{11} - bE22) + t(bE_{12} + bE_{21}) \\ =& b(t - x)(E_{12} + E_{21}) + b(y + z)(E_{11} - E_{22}). \end{aligned}$$

Si $M \in \operatorname{Ker}(f_A)$, on a $b(t - x)(E_{12} + E_{21}) + b(y + z)(E_{11} - E_{22}) = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$. Puisque $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ est une base, $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ sont libre. Du coup,

$$b(t-x) = b(y+z) = 0 \Longrightarrow t = x,\ y = -z \Longrightarrow M = x(E_{11} + E_{22}) + y(E_{12} - E_{21}) = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}.$$

Donc,

$$\operatorname{Ker}(f_A) = \{M = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \Big| x, y \in \mathbb{R}\}.$$

D'autre coté, pour toute $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, on a $f_A(M) = b(t-x)(E_{12}+E_{21})+b(y+z)(E_{11}-E_{22}) \in \operatorname{Vect}(E_{12} + E_{21}, E_{11} - E_{22})$. Puisque $t - x$ et $y + z$ peuvent prendre n'importe quelles valeurs réelles, on a

$$\operatorname{Im}(f_A) = \operatorname{Vect}(E_{12} + E_{21}, E_{11} - E_{22}) = \{M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \Big| a, b \in \mathbb{R}\}.$$

(b) Montrer que $\operatorname{Ker}(f_A) \cap \operatorname{Im}(f_A) = \{0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}\}$. En déduire que $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \operatorname{Ker}(f_A) \oplus \operatorname{Im}(f_A)$.
Solution : On va montrer que $\operatorname{Ker}(f_A) \cap \operatorname{Im}(f_A) = \{0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}\}$. En effet, soit $M \in \operatorname{Ker}(f_A) \cap \operatorname{Im}(f_A)$, il existent $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ tels que

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$$

Donc, $a = -a = x$ et $y = -y = b$. On obtient que $a = b = x = y = 0$ et que $M = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$. Par le théorème du rang, on a déjà

$$\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) = \dim(\operatorname{Ker}(f_A)) + \dim(\operatorname{Im}(f_A)).$$

Donc, on conclut que $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \operatorname{Ker}(f_A) \oplus \operatorname{Im}(f_A)$.

(c) Montrer que $f_A^3 = -4b^2 f_A$.
Solution : Notons que $\operatorname{Ker}(f_A) = \operatorname{Vect}(E_{11} + E_{22}, E_{12} - E_{21})$ et que $\operatorname{Im}(f_A) = \operatorname{Vect}(E_{12} + E_{21}, E_{11} - E_{22})$. Puisque $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \operatorname{Ker}(f_A) \oplus \operatorname{Im}(f_A)$, $\mathcal{B}' = (E_{11} + E_{22}, E_{12} - E_{21}, E_{12} + E_{21}, E_{11} - E_{22})$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On pose

$$e_1 = E_{11} + E_{22}, e_2 = E_{12} - E_{21}, e_3 = E_{12} + E_{21}, e_4 = E_{11} - E_{22}.$$

Alors, $f_A(e_1) = 0$, $f_A(e_2) = 0$, $f_A(e_3) = 2b(E_{11} - E_{22}) = 2be_4$ et $f_A(e_4) = -2b(E_{12} + E_{21}) = -2be_3$. De plus,

$$f_A^3(e_1) = 0 = -4b^2 f_A(e_1),\ f_A^3(e_2) = 0 = -4b^2 f_A(e_2);$$

et

$$f_A^3(e_3) = -8b^2 e_4 = -4b^2 f_A(e_3),\ f_A^3(e_4) = -8b^2 e_3 = -4b^2 f_A(e_4).$$

Donc, $f_A^3 = -4b^2 f_A$ sur la base $\mathcal{B}'$ implique que $f_A^3 = -4b^2 f_A$ sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

4. On définit $\Psi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ par
$$\Psi(A) = f_A.$$
Montrer que Ψ est une application linéaire. De plus, montrer que $\mathrm{Ker}(\Psi) = \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_2)$ où I_2 est la matrice identité dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Solution : Soient $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. *Soit* $\lambda \in \mathbb{R}$. *On va montrer que* $\Psi(A + \lambda B) = \Psi(A) + \lambda\Psi(B)$. *Observons que*
$$\begin{aligned}\Psi(A + \lambda B) = f_{A+\lambda B} =& [M \mapsto (A + \lambda B)M - M(A + \lambda B)]\\ =& [M \mapsto f_A(M) + \lambda f_B(M)] = f_A + \lambda f_B\\ =& \Psi(A) + \lambda\Psi(B).\end{aligned}$$
Donc Ψ *est une application linéaire. Son noyau est* $\mathrm{Ker}(\Psi) = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) | f_A(M) = 0, \forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\}$. *Pour* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(\Psi)$,
$$f_A(M) = AM - MA = 0, \forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} 0 & -c & b & 0 \\ -b & (a-d) & 0 & b \\ c & 0 & -(a-d) & -c \\ 0 & c & -b & 0 \end{pmatrix} = 0$$
Autrement dit, $b = c = a - d = 0$ *et* $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = a\mathrm{I}_2$ *avec* $a \in \mathbb{R}$. *Ainsi, on conclut que* $\mathrm{Ker}(\Psi) = \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_2)$.

Exercice 2 Lemme de Gronwall

1. Le but de cette question est démontrer le lemme de Gronwall

Lemma 1 *Soit* $I = [a, b[$ *un intervalle et* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. On suppose qu'il existe deux constantes* $C \geqslant 0$ *et* $L > 0$ *telles que*
$$f(t) \leqslant C + L \int_a^t f(s)ds, \quad \forall t \in I. \tag{1}$$
Alors
$$f(t) \leqslant Ce^{L(t-a)}, \quad \forall t \in I. \tag{2}$$
Pour obtenir ce résultat, on introduit la fonction $\psi : I \to \mathbb{R}$ définie par
$$\psi(t) = C + L \int_a^t f(s)ds, \quad \forall t \in I.$$

(a) Montrer que ψ est dérivable sur I et calculer sa dérivée.
Preuve : ψ *est dérivable sur* $]a, b[$ *car* f *est continue sur* I *et sa dérivé est*
$$\psi'(t) = Lf(t), \forall t \in]a, b[.$$

(b) Montrer que sous (1),
$$\psi'(t) \leqslant L\psi(t), \quad \forall t \in I.$$
Preuve : Notons que par (1),
$$\psi'(t) = Lf(t) \leqslant L\left(C + L \int_a^t f(s)ds\right) = L\psi(t), \forall t \in]a, b[.$$

(c) En déduire que
$$\psi(t) \leqslant Ce^{L(t-a)}, \quad \forall t \in I.$$
Indication : calculer la dérivée de $\psi(t)e^{-L(t-a)}$.

Solution : $\psi(t)e^{-L(t-a)}$ *est dérivable sur* $]a,b[$ *car* ψ *est dérivable sur* $]a,b[$*. On a*

$$\frac{d}{dt}\psi(t)e^{-L(t-a)} = \psi'(t)e^{-L(t-a)} - L\psi(t)e^{-L(t-a)} = \left(\psi'(t) - L\psi(t)\right)e^{-L(t-a)} \leqslant 0,$$

par (b). Donc, $\psi(t)e^{-L(t-a)} \leqslant \psi(a)e^{-L(a-a)} = \psi(a) = C$ *pour tout* $t \in I$*. Ceci implique que* $\psi(t) \leqslant Ce^{L(t-a)}$ *pour tout* $t \in I$*.*

(d) Conclure (2) par (a)-(c).

Preuve : Rappelons que $f(t) \leqslant C + L\int_a^t f(s)ds = \psi(t)$*. Donc (c) implique que*

$$f(t) \leqslant Ce^{L(t-a)}, \forall t \in I.$$

2. On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) \quad y'(t) + \alpha(t)y(t) = 0, t \in]-1,1[,$$

où $\alpha(t)$ est une fonction continue sur $[-1,1]$. Disons que $y(t)$ et $y_1(t)$ sont deux solutions non nulles telles que $y_1(0) \neq 0$. On pose $b = y(0)/y_1(0)$.

(a) Expliquer pourquoi $\alpha(t)$ est bornée.

Solution : Puisque $[-1,1]$ *est un compact,* $\alpha(t)$ *est continue sur un compact donc elle est bornée sur ce compact.*

(b) On introduit la fonction $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = (y(t) - by_1(t))^2.$$

Montrer que

$$f(t) = \int_0^t f'(s)ds \leqslant L\int_0^t f(s)ds, \forall t \in [0,1[,$$

où $L > 0$ est une constante à préciser/choisir.

Preuve : f *est dévriable car les solutions* y *et* y_1 *le sont. De plus,* $f(0) = 0$ *selon la valeur de* b*. Donc,*

$$f(t) = \int_0^t f'(s)ds = \int_0^t 2(y(s) - by_1(s))(y'(s) - by_1'(s))ds.$$

A nouveau, puisque y *et* y_1 *sont des solutions de (E), on a* $y'(s) = -\alpha(s)y(s)$ *et* $y_1'(s) = -\alpha(s)y_1(s)$ *pour tout* $s \in]-1,1[$*. D'ici,*

$$f(t) = \int_0^t 2(y(s)-by_1(s))(y'(s)-by_1'(s))ds = \int_0^t (-2\alpha(s))(y(s)-by_1(s))^2 ds = \int_0^t (-2\alpha(s))f(s)ds$$

Rappelons que α *est bornée et* $f(s) = (y(s) - by_1(s))^2 \geqslant 0$*. Alors, pour tout* $s \in]-1,1[$,

$$(-2\alpha(s))f(s) \leqslant Lf(s), \text{ avec } L = 2\max_{s\in[-1,1]}|\alpha(s)| < \infty.$$

Ainsi, on a

$$f(t) \leqslant L\int_0^t f(s)ds, \forall t \in [0,1[$$

(c) En utilisant le Lemme de Gronwall, montrer que

$$f(t) \leqslant 0, \forall t \in [0,1[.$$

Preuve : Notons que f *est continue sur* $]-1,1[$*. On applique le Lemma de Gronwall avec* $C = 0$ *sur* $[0,1[$ *et conclut que* $f(t) \leqslant 0$, $\forall t \in [0,1[$*.*

(d) Si on pose $g(t) = f(-t)$ pour $t \in [0,1[$, montrer que

$$g(t) \leqslant L \int_0^t g(s)ds, \forall t \in [0,1[,$$

et en déduire que $f(-t) = g(t) \leqslant 0$ pout tout $t \in [0,1[$.

Solution : Notons que g est positive, continue sur $[0,1[$ et dérivable sur $]0,1[$ et que

$$\begin{aligned} g(t) = g(t) - g(0) = \int_0^t g'(s)ds = - \int_0^t f'(-s)ds & \\ &= \int_0^t (2\alpha(-s))(y(-s) - by_1(-s))^2 ds = \int_0^t (2\alpha(-s))f(-s)ds \\ &= \int_0^t (2\alpha(-s))g(s)ds \leqslant L \int_0^t g(s)ds. \end{aligned}$$

A nouveau, par le Lemma de Gronwall, $g(t) \leqslant 0$ pour tout $t \in [0,1[$. Autrement dit, $f(t) \leqslant 0$ pour tout $t \in]-1,0]$.

(e) Conclure que toutes les solution de (E) sont de la forme $t \mapsto \lambda y_1(t)$ pour $t \in]-1,1[$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Donc l'ensemble des solutions de (E) est un espace vectoriel de dimension 1.

Solution : (c) et (d) impliquent que $f(t) \leqslant 0$ pour tout $t \in]-1,1[$. Or $f(t) = (y(t) - by_1(t))^2 \geqslant 0$. D'où, on a $f(t) = (y(t) - by_1(t))^2 = 0$ pour tout $t \in]-1,1[$. Autrement dit,

$$y(t) = by_1(t), \forall t \in]-1,1[.$$

Par conséquence, on voit que chaque solution $y(t)$ de (E) est de la forme $y(t) = \lambda y_1(t)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Réciproquement, chaque fonction de la forme $\lambda y_1(t)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ est aussi une solution de (E). Donc, on en déduit que

$$\{ \textit{ Solutions de } (E)\} = \{t \mapsto \lambda y_1(t), t \in]-1,1[| \lambda \in \mathbb{R}\},$$

qui est un espace vectoriel engendré par $y_1(t)$ et donc de dimension 1.