
Devoir surveillé n°3
Durée : 1h30

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les réponses aux exercices doivent donc être clairement rédigées. Le détail des calculs doit apparaître sur la copie. La présentation doit être la plus soignée possible. **Enfin, si vous pensez avoir repéré une erreur d'énoncé, signalez-le sur la copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.**

Exercice 1

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer que

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Im}(u)) + \dim(\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u)).$$

Exercice 2 Soit $E = \mathbb{R}^3$. On introduit une fonction f définie par

$$f(x, y, z) = (17x - 28y + 4z, 12x - 20y + 3z, 16x - 28y + 5z), \forall (x, y, z) \in E.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme sur E.
2. Écrire la matrice de f dans la base canonique.
3. Déterminer une base $\mathcal{B}_1$ du noyau de f. En déduire le rang de f.
4. Soit $F := \{(x, y, z) \in E : f(x, y, z) = (x, y, z)\}$. Justifier que F est un sous-espace vectoriel de E et déterminer une base $\mathcal{B}_2$ de F.
5. Montrer que $E = F \oplus \mathrm{Ker}(f)$.
6. Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$.
7. Montrer que $f^2 = f$ où $f^2 = f \circ f$.
8. Soit $g = f + \mathrm{id}$. Montrer que $g^2 = 3g - 2\mathrm{id}$. En déduire que g est inversible. Et exprimer son inverse g^{-1} comme une combinaison linéaire de f et id.

Exercice 3 Résoudre des équations différentielles suivantes.

1. (E_0) : $2y'(x) - y(x) = x^2$ pour $x \in \mathbb{R}$.
2. (E_1) : $y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = e^{2x}$ pour $x \in \mathbb{R}$.
3. (E_2) : $(1 + x^2)y'(x) - xy(x) = x$ pour $x \in \mathbb{R}$, avec $y(0) = 1$.