Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2018-2019
Cursus préparatoire, Fondamentaux des Mathématiques 2 13 mars 2019

Devoir surveillé n° 2 bis
Durée : 1h30

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les réponses aux exercices doivent donc être clairement rédigées. Le détail des calculs doit apparaître sur la copie. La présentation doit être la plus soignée possible. Enfin, si vous pensez avoir repéré une erreur d'énoncé, signalez-le sur la copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.

Problème 1 Dans tout le problème, on définit sur $\mathbf{R}$ la fonction

$$f : t \mapsto e^{-t^2} \int_0^t e^{x^2} dx.$$

1. Justifier que f est de classe C^∞, qu'elle est impaire et solution de l'équation différentielle

$$(E) \quad y' + 2ty = 1.$$

Les fonctions $t \mapsto e^{\pm t^2}$ sont $\mathcal{C}^\infty$ comme composées de fonction $\mathcal{C}^\infty$. La primitive $t \mapsto \int_0^t e^{x^2} dx$ est donc également $\mathcal{C}^\infty$ et finalement le produit f.
Elle est impaire car $f(-t) = e^{-t^2} \int_0^{-t} e^{x^2} dx$. Or $x \mapsto e^{x^2}$ est paire donc $\int_0^{-t} e^{x^2} dx = -\int_0^t e^{x^2} dx$ et finalement $f(-t) = -f(t)$.
La dérivée du produit nous donne

$$f'(t) = \frac{de^{-t^2}}{dt} \int_0^t e^{x^2} dx + e^{-t^2} \frac{d\int_0^t e^{x^2} dx}{dt} = -2te^{-t^2} \int_0^t e^{x^2} dx + e^{-t^2} e^{t^2} = -2tf(t) + 1,$$

donc f vérifie (E).

2. À l'aide de f, déterminer toutes les solutions de (E). Montrer que f est la seule solution de (E) qui s'annule en 0 et que c'est la seule solution impaire.

L'équation homogène $(E_0) : y' + 2ty = 0$ est équivalente à $\frac{y'}{y} = -2t$ donc $y(t) = \lambda e^{-t^2}$ avec $\lambda \in \mathbf{R}$, qui n'est pas impaire et vaut λ en 0. Donc toute solution est de la forme $t \mapsto f(t) + \lambda e^{-t^2}$ et la seule manière d'être impaire ou de valoir 0 en 0 est que la composante homogène soit nulle.

3. Expliquer pourquoi f admet un développement limité à l'ordre n en 0 pour tout entier n. On écrit ce développement $f(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k + o(t^n)$. Déterminer a_{100}.

Comme $f \in \mathcal{C}^\infty$, la formule de Taylor-Young nous assure qu'elle admet un développement limité à n'importe quel ordre en tout point. Comme la fonction est impaire, ses coefficients de degré pair sont nuls et $a_{100} = 0$.

4. Pour $n \in \mathbf{N}$, on introduit aussi le développement limité de la dérivée f' à l'ordre n en 0 qu'on écrit

$$f'(t) = \sum_{k=0}^n b_k t^k + o(t^n).$$

Justifier le fait que $b_k = (k+1)a_{k+1}$ pour tout $k \leqslant n$.

Le théorème d'intégration des développements limités nous assure qu'on peut calculer le développement limité de f à l'ordre $n+1$ en 0 en intégrant le développement limité de f' à l'ordre n en 0 si bien que

$$f(t) = f(0) + \sum_{k=0}^n b_k \frac{t^{k+1}}{k+1} + o(t^{n+1}).$$

Par unicité du développement limité, on en déduit que, pout tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, on a $\frac{b_k}{k+1} = a_{k+1}$. Ceci étant vrai pour tout n, on a $\forall k \in \mathbf{N}, b_k = (k+1)a_{k+1}$.

5. En utilisant le fait que f est solution de (E), établir une relation entre a_k et a_{k+2} pour tout $k \in \mathbf{N}$.

Puisque $f' + 2tf = 1$, on peut écrire, pour $n \in \mathbf{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} b_k t^k + 2t \sum_{k=0}^{n} a_k t^k + o(t^n) = \sum_{k=0}^{n} (k+1) a_{k+1} t^k + 2 \sum_{\ell=1}^{n+1} a_{\ell-1} t^\ell + o(t^n)$$

$$= a_1 + \sum_{k=1}^{n} \big((k+1) a_{k+1} + 2a_{k-1}\big) t^k + 2a_n t^{n+1} + o(t^n) = 1.$$

Par unicité, tous les degrés entre 1 et n sont nuls et comme n est quelconque, $\forall k \in \mathbf{N}, a_{k+2} = -2\frac{a_k}{k+2}$.

6. Dresser un tableau des valeurs rationnelles explicites pour $k \leqslant 6$ puis donner la valeur de a_k pour tout $k \in \mathbf{N}$.

On sait que les termes pairs sont nuls et pour les termes impairs, $a_1 = 1$, $a_3 = -2\frac{a_1}{3} = -\frac{2}{3}$, $a_5 = -2\frac{a_3}{5} = \frac{4}{15}$ soit

k	0	1	2	3	4	5	6
a_k	0	1	0	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{4}{15}$	0

Pour $k \in \mathbf{N}$,

$$a_{2k+1} = -2\frac{a_{2k-1}}{2k+1} = (-2)^2 \frac{a_{2k-1} a_{2k-3}}{(2k+1)(2k-1)} = \frac{(-2)^k}{\prod_{\ell=1}^{k} 2\ell + 1} = \frac{(-4)^k k!}{(2k+1)!}.$$

Problème 2

Dans tout ce problème, a désigne un réel différent de 1. On se propose d'étudier les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifiant une relation de récurrence du type :

$$\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = a u_n + P(n)$$

où P est un polynôme. On note $E = \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des suites réelles et indifféremment u ou $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ un de ses éléments. On définit pour un entier naturel p fixé

$$E_a^{(p)} = \{u \in E : \exists P \in \mathbf{R}_p[X], \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = a u_n + P(n)\}.$$

1. Montrer que $E_a^{(p)}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Tout d'abord la suite nulle est bien solution avec le polynôme nul. Ensuite, avec $u, v \in E_a^{(p)}$ deux solutions, $P, Q \in \mathbf{R}_p[X]$ associés, et un scalaire $\lambda \in \mathbf{R}$, la suite $w = \lambda u - v$ vérifie pour tout entier n, $w_{n+1} = \lambda u_{n+1} - v_{n+1} = \lambda\big(a u_n + P(n)\big) - \big(a v_n + Q(n)\big) = a(\lambda u_n - v_n) + \lambda P(n) - Q(n)$ donc $w \in E_a^{(p)}$ avec le polynôme $\lambda P - Q \in \mathbf{R}_p[X]$. Donc $E_a^{(p)}$ est un sous-espace vectoriel des polynômes de degré au plus p.

2. Soit $u \in E_a^{(p)}$ et $P \in \mathbf{R}[X]$ un polynôme tel que $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = a u_n + P(n)$. Montrer qu'un tel polynôme est unique, on le notera P_u. Montrer que $u \mapsto P_u$ est une application linéaire de $E_a^{(p)}$ dans $\mathbf{R}[X]$.

Supposons que $Q \in \mathbf{R}_p[X]$ vérifie la même équation. Alors, par différence en chaque entier, $P - Q \in \mathbf{R}_p[X]$ s'annule en tous les entiers naturels, mais un polynôme de degré $k \in \mathbf{N}$ a au plus k zéros, donc $P - Q = 0$, le polynôme nul et $P = Q$. Le polynôme associé est donc unique et on peut définir l'application $u \mapsto P_u$ de $E_a^{(p)}$ dans $\mathbf{R}_p[X]$.

Les arguments de linéarité de la question précédente prouvent que cette application est linéaire.

3. On définit $y \in E$ par $\forall n \in \mathbf{N}, y_n = a^n$. Montrer que les éléments $u \in E_a^{(p)}$ tels que $P_u = 0$ est le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(y)$.

Tout d'abord la suite y est effectivement un élément de $E_a^{(p)}$ associé au polynôme nul car, pour n entier, $y_{n+1} = a^{n+1} = a y_n + 0$ donc, par linéarité, toute la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(y) \subset E_a^{(p)}$. Ensuite, si $u \in E_a^{(p)}$ avec $P_u = 0$, alors, pour $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = a u_n = a^n u_0$ donc $u = u_0 \times y \in \mathrm{Vect}(y) = \ker(u \mapsto P_u)$.

4. Montrer que $F_a^{(p)} = \{u \in E_a^{(p)} : u_0 = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E. Montrer

$$\forall u, v \in F_a^{(p)},\ P_u = P_v \iff u = v.$$

Comme $E_a^{(p)}$ est un espace-vectoriel et que le polynôme nul est clairement dans $F_a^{(p)}$, il suffit de montrer que cet ensemble est stable par combinaison linéaire. Si $u, v \in F_a^{(p)}$ et $w = \lambda u - v$, alors $w_0 = \lambda u_0 - v_0 = 0$ donc $w \in F_a^{(p)}$.

Si, pour $u, v \in F_a^{(p)}$, $P_u = P_v$, alors $u - v \in \mathrm{Vect}(y)$ mais $y_0 = 1$ et $u_0 = v_0 = 0$ donc le coefficient de proportionnalité est 0 et $u - v = 0_{\mathbf{R}^{\mathbf{N}}}$, $u = v$ et $u \mapsto P_u$ est une application injective quand on la restreint à $F_a^{(p)}$.

5. Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbf{R}_p[X]$, il existe un unique $u \in F_a^{(p)}$ tel que $P = P_u$.

   Partant de $u_0 = 0$, la relation de récurrence $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = au_n + P(n)$ définit de manière unique la suite $u \in E_a^{(p)}$, donc par construction, $u \in F_a^{(p)}$ et, comme $d(P) \leqslant p$, $P_u = P$ par la question précédente. Donc $u \mapsto P_u$ est surjective de $F_a^{(p)}$ dans $\mathbf{R}_p[X]$. Elle y est donc aussi bijective et $\dim(F_a^{(p)}) = \dim(\mathbf{R}_p[X]) = p + 1$.

6. Montrer que $E_a^{(p)} = F_a^{(p)} \oplus \mathrm{Vect}(y)$. *Indication : Utiliser $v \in F_a^{(p)}$ tel que $P_u = P_v$ et considérer $u - v$.*

   Une suite $u \in F_a^{(p)} \cap \mathrm{Vect}(y)$ a pour premier terme 0 et est colinéaire à y donc elle est nulle d'après la question 3. Donc l'intersection $F_a^{(p)} \cap \mathrm{Vect}(y) = \{0_{\mathbf{R}^{\mathbf{N}}}\}$.

   Pour tout $u \in E_a^{(p)}$, il existe une unique suite $v \in F_a^{(p)}$ telle que $P_v = P_u$ d'après la question précédente. Alors, $v + u_0 y$ est une suite de $E_a^{(p)}$ qui a même valeur de départ que u et pour polynôme $P_v + u_0 P_y = P_u$ car $P_y = 0$. Par unicité de la solution à la relation de récurrence à premier terme et polynôme fixé, c'est la même suite que u, donc $u = v + u_0 y$ et $E_a^{(p)} = F_a^{(p)} \oplus \mathrm{Vect}(y)$.

7. On définit pour $k \in \{0, \dots, p\}$, une suite $x^{(k)}$ en posant : $x_0^{(0)} = 1$ et $\forall n \in \mathbf{N}, x_n^{(k)} = n^k$.

   (a) Montrer que pour $k \in \{0, \dots, p\}, x^{(k)} \in E_a^{(p)}$ et calculer $P_{x^{(k)}}$.

   Pour $k, n \in \mathbf{N}$, $k \leqslant p$, la suite $x^{(k)}$ vérifie $x_{n+1}^{(k)} = (n+1)^k = an^k + P_{x^{(k)}}(n)$ où $P_{x^{(k)}}(X) = (X+1)^k - aX^k \in \mathbf{R}_k[X] \subset \mathbf{R}_p[X]$.

   (b) Montrer que la famille $(x^{(0)}, \dots, x^{(p)}, y)$ est une base de $E_a^{(p)}$.

   Comme, pour $k \in \{0, \dots, p\}$ le degré du polynôme $P_{x^{(k)}}$ est k, ils forment une famille libre. Comme $\dim(\mathbf{R}_p[X]) = p+1$, c'est donc une base. L'application $u \mapsto P_u$ étant injective sur $F_a^{(p)}$, la dimension de $F_a^{(p)}$ est égale à la dimension de son image, soit $\dim(\mathbf{R}_p[X]) = p + 1$ car elle est également surjective d'après la question précédente. La famille $(x^{(0)} - y) \cup \left(x^{(k)}\right)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ est donc une base de $F_a^{(p)}$ ($x_1^{(0)} = 1 = y_0 \neq 0$ donc $x^{(0)} - y \in F_a^{(p)}$). Comme cet espace est en somme directe avec $\mathrm{Vect}(y)$, on complète cette base de $F_a^{(p)}$ en une base de $E_a^{(p)}$ en lui adjoignant y.

   Remarquons que l'application linéaire $u \mapsto P_u$ décompose donc l'espace vectoriel $E_a^{(p)}$ en son noyau $\mathrm{Vect}(y)$ et un supplémentaire $F_a^{(p)}$ isomorphe à son image, dont une base est donnée par l'image réciproque d'une base de l'image, soit les $x^{(k)}$.

8. Application : déterminer la suite u vérifiant les relations $u_0 = -2$ et $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = 2u_n - 2n + 5$.

   Dans ce cas, $a = 2$ et le polynôme associé est $P_u(X) = -2X + 5$ et il est une combinaison linéaire de $P_{x^{(0)}}(X) = (X+1)^0 - aX^0 = 1 - 2 = -1$ et $P_{x^{(1)}}(X) = (X+1) - 2X = -X + 1$ avec les coefficients $P_u = 2P_{x^{(1)}} - 3P_{x^{(0)}}$ donc $u = y + 2x^{(1)} - 3x^{(0)}$ (le coefficient de y est défini par $u_0 = -2$), soit pour $n \in \mathbf{N}$, $u_n = 2^n + 2n - 3$.

   Une autre façon de résoudre le problème, en dressant le tableau des trois premières valeurs de chacune des suites :

n	0	1	2
u_n	-2	1	5
y_n	1	2	4
$x_n^{(0)}$	1	1	1
$x_n^{(1)}$	0	1	2

   on obtient le système suivant, on cherche $u_n = \lambda \times 2^n + \mu + \nu n$ avec $A \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

   donc l'unique solution est $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ soit $u_n = 2^n - 3 + 2n$.