Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre de printemps 2018-2019

Cursus préparatoire — Fondamentaux des mathématiques 2 — 13 mars 2019

Devoir surveillé n° 2
Durée : 1h30

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les réponses aux exercices doivent donc être clairement rédigées. Le détail des calculs doit apparaître sur la copie. La présentation doit être la plus soignée possible. Enfin, si vous pensez avoir repéré une erreur d'énoncé, signalez-le sur la copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.

Exercice 1

1. Calculer le développement limité de $f(x) = \ln(1+\sqrt{x})$ à l'ordre 2 lorsque $x \to 1$.
2. Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = (3\sqrt[n]{2} - 2\sqrt[n]{3})^n$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{8}{9}$.

Exercice 2 On considère la fonction f définie sur $]-1\,,+\infty[\setminus\{0\}$ par $f(x) = \dfrac{\sin x}{\ln(1+x)}$.

1. Calculer le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de 0.
   Indication : le coefficient du terme en x^2 que vous devez trouver est $-1/4$.
2. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
   Dans la suite de l'exercice, on note encore f le prolongement ainsi obtenu.
3. Quelle est l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse 0 ? Justifiez soigneusement votre réponse.
4. Quelle est la position du graphe de f par rapport à cette tangente au voisinage de 0 ?

Exercice 3

1. Montrer que $E = \{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 \mid -x+y+2z = 0 \text{ et } y+t = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$.
2. La famille (u,v,w) formée des vecteurs $u = (3,1,1,-1)$, $v = (4,2,1,-2)$ et $w = (1,-1,1,1)$ est-elle libre ou liée ?
3. Déterminer une base de $F = \mathrm{Vect}(u,v,w)$.
4. Montrer que $E = F$.

Exercice 4 On considère les ensembles E, F et G de $\mathbf{R}^3$ définis par $E = \{(3\alpha-\beta, \alpha+\beta, \beta) \mid \alpha,\beta \in \mathbf{R}\}$, $F = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x+y+z = 0\}$ et $G = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid 2x-2y+3z = 0\}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$.
   On admet que F et G sont aussi des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$.
2. Donner des bases de E, F et G, et indiquer leurs dimensions respectives.
3. Déterminer $E \cap F$ et indiquer sa dimension.
4. Montrer que $E + F = \mathbf{R}^3$.
5. Montrer que $E \cap F$ est inclus dans G. *Attention : le résultat attendu par cette question est faux, à cause d'une erreur d'énoncé sur la définition de E.*
6. Déterminer un sous-espace V tel que $(E \cap F) \oplus V = \mathbf{R}^3$.