Éléments de réponse au devoir surveillé n°1

Exercice 1 On pose

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 8 & 12 \\ 2 & 14 & 16 & 29 \\ 3 & 14 & 17 & 33 \end{pmatrix}.$$

Pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$, on a :

$$X \in \ker B \iff B.X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^4} \iff \begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 0 & (L_1) \\ 2x + 6y + 8z + 12t = 0 & (L_2) \\ 2x + 14y + 16z + 29t = 0 & (L_3) \\ 3x + 14y + 17z + 33t = 0 & (L_4) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 0 & (L_1') \leftarrow L_1 \\ 2y + 2z + 4t = 0 & (L_2') \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ 10y + 10z + 21t = 0 & (L_3') \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ 8y + 8z + 21t = 0 & (L_4') \leftarrow L_4 - 3L_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 0 & (L_1'') \leftarrow L_1' \\ 2y + 2z + 4t = 0 & (L_2'') \leftarrow L_2' \\ t = 0 & (L_3'') \leftarrow L_3' - 5L_2' \\ 5t = 0 & (L_4'') \leftarrow L_4' - 4L_2' \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + 2y = -3z \leftarrow L_1'' - 4L_3'' \\ 2y = -2z \leftarrow L_2'' - 4L_3'' \\ t = 0 \leftarrow L_3'' \end{cases} \iff \begin{cases} y = -z \\ x = -2y - 3z = 2z - 3z = -z \\ t = 0 \end{cases}$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} -z \\ -z \\ z \\ 0 \end{pmatrix} = zv, \text{ avec } v := \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On en conclut que le noyau $\ker B$ de B est $\{X \in \mathbb{R}^4 \mid \exists z \in \mathbb{R}, X = zv\}$. Au passage, on obtient que

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est ***une*** forme échelonnée (en lignes) de B.

Remarque : Ce n'était pas demandé, mais ***la*** forme échelonnée (en lignes) réduite de B est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 2

1. Un calcul élémentaire donne

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } A^3 = \begin{pmatrix} -4 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On a donc bien $A^3 = -A^2 + A + I$.

2. Par la question 1, on a : $A^3+A^2-A=I \iff A\left(A^2+A-I\right)=\left(A^2+A-I\right)A=I$, d'où A est inversible et $A^{-1}=A^2+A-I$. On a donc en reprenant les calculs de la question 1 :
$$A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & -5 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 10 & -2\end{pmatrix}.$$

3. Pour tout $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$ et $Y=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$, on peut écrire
$$A.X=Y \iff \left\{\begin{array}{rrrl} x & +5y & & =c\\ & y & & =b\\ -2x & & -z & =a\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrl} x & +5y & & =c\\ & y & & =b\\ & & -z & =a-10b+2c\end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{l} z=-a+10b-2c\\ y=b\\ x=c-5y=c-5b\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lrrr} x= & & -5b & +c\\ y= & & b & \\ z= & -a & +10b & -2c\end{array}\right. \iff X=C.Y\,,$$
où
$$C:=\begin{pmatrix}0 & -5 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 10 & -2\end{pmatrix}.$$
D'où A est bien inversible et son inverse $A^{-1}=C$.

4. Montrons par récurrence sur l'entier $n\geq 1$ la propriété suivante
$$(\mathscr{P}_n):\qquad A^n=\frac{1}{4}\left(a_nA^2+b_nA+c_nI\right),$$
avec a_n,b_n,c_n donnés par les formules explicites de l'énoncé.

Initialisation : on vérifie que $a_1=0$, $b_1=4$ et $c_1=0$, d'où $(\mathscr{P}_1)$ est vraie.
Hérédité : supposons que $(\mathscr{P}_n)$ est vraie pour un entier $n\geq 1$ et montrons $(\mathscr{P}_{n+1})$. On a
$$\begin{aligned}4A^{n+1}=4A.A^n=a_nA^3+b_nA^2+c_nA&=a_n(-A^2+A+I)+b_nA^2+c_nA\\ &=(b_n-a_n)A^2+(c_n+a_n)A+a_nI\,,\end{aligned}$$
utilisant la question 1 pour obtenir la troisième égalité. On vérifie alors :
$$\begin{aligned}b_n-a_n&=2\left(1+(-1)^{n+1}\right)+(-1)^{n+1}(2n-1)-1=(-1)^{n+1}(2(n+1)-1)+1=a_{n+1}\,,\\ c_n+a_n&=(-1)^{n+1}(2n-3)+1-(-1)^{n+1}(2n-1)+1=2\left(1+(-1)^{n+2}\right)=b_{n+1}\,,\\ a_n&=(-1)^n(2n-1)+1=(-1)^{n+2}(2(n+1)-3)+1=c_{n+1}\,,\end{aligned}$$
ce qui prouve $(\mathscr{P}_{n+1})$ et conclut.

La propriété $(\mathscr{P}_n)$ est donc bien vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$.

Exercice 3

1. (a) Avec les quantificateurs, cette assertion peut s'écrire de la façon suivante :
$$\forall\varepsilon>0,\exists M>0,\quad \forall x\geq M,\left|\frac{f(x)}{x}-l\right|\leq\varepsilon.$$

(b) Appliquons la question précédente avec $\varepsilon=\frac{1-l}{2}>0$ (car $l<1$) et $M=:x>0$ ainsi fourni. On obtient alors
$$\frac{f(x)}{x}-l\leq\frac{1-l}{2}\underbrace{\Longrightarrow}_{\text{car }x>0}f(x)\leq\frac{2l+(1-l)}{2}x\leq\frac{1+l}{2}x\leq x\,,$$
utilisant aussi que $l\leq 1$ dans la dernière inégalité, ce qui conclut.

(c) Par la question 1(b), l'ensemble E est **non vide**. L'ensemble $E \subset [0, +\infty[$ est évidemment **minoré** par 0, d'où il admet une borne inférieure $b \geq 0$. L'existence de $b \in \mathbb{R}$ découle des propriétés de $\mathbb{R}$ tandis que, par définition de la borne inférieure, b est plus grande que le minorant 0.

(d) i. Comme $x_n \in E$ et par définition de la borne inférieure, on a $b \leq x_n$ pour tout n. On conclut car la fonction f est supposée croissante.

ii. Comme $x_n \in E$, on a $f(x_n) \leq x_n$ par définition de E; utilisant la question précédente, on obtient donc $f(b) \leq x_n$ pour tout n. Comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers b, on peut faire tendre $n \to +\infty$ dans cette inégalité, ce qui conclut.

(e) On veut montrer dans cette question que

$$f(b) \geq b. \qquad (\star)$$

i. Comme f est à valeurs dans $[0, +\infty[$, $f(b) \geq 0$, ce qui prouve $(\star)$ pour $b = 0$.

ii. Si $b > 0$, l'ensemble $]0, b]$ est non vide et on peut donc choisir $\varepsilon \in]0, b]$. Par définition de la borne inférieure et comme $b-\varepsilon < b$, on a $b-\varepsilon \notin E$, soit $f(b-\varepsilon) > b-\varepsilon$ d'après la condition de l'ensemble E. Comme f est croissante, on a indépendamment $f(b) \geq f(b-\varepsilon)$. En faisant tendre $\varepsilon \to 0$ dans l'inégalité $f(b) \geq b - \varepsilon$, on obtient bien $(\star)$.

(f) Par 1(d)ii. et $(\star)$, $f(b) = b$ et b est bien un point fixe de f.

2. En considérant la fonction croissante $f : x \mapsto x+1$ satisfaisant $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, on voit que f n'a pas forcément de point fixe si $l = 1$.

Exercice 4

1. On vérifie tout d'abord que la fonction $h : x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$ comme fraction de deux fonctions polynômiales dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus, h est à valeurs dans $[-1, 1]$ car :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left|\frac{2x}{1+x^2}\right| \leq 1 \iff 2|x| \leq 1 + x^2 \iff 0 \leq 1 - 2|x| + |x|^2 = (1-|x|)^2,$$

cette dernière propriété étant clairement vraie. D'où, comme la fonction arcsin est continue sur $[-1, 1]$, $g = \arcsin \circ h$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$ comme composée. Enfin, pour $x \in \mathbb{R}$, on a $h(-x) = -h(x)$, d'où h est une fonction impaire, comme l'est arcsin. D'où $g = \arcsin \circ h$ est aussi impaire.

2. La fonction arcsin est dérivable sur $]-1, 1[$, et on a, en reprenant le calcul précédent,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) \in \{-1, 1\} \iff 1 - |x| = 0 \iff x \in \{-1, 1\}.$$

D'où $g = \arcsin \circ h$ est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$ comme composée. On peut alors calculer directement

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}, \quad g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} \frac{2(1+x^2) - (2x)^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{|1-x^2|(1+x^2)},$$

ce qui coïncide bien avec la formule de l'énoncé $\left(⚠ \sqrt{(1-x^2)^2} = |1-x^2| ⚠\right)$.

3. (a) On peut écrire lorsque $h \to 0$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+(1+h)^2} &= \frac{1}{2+2h+h^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\left(h+\frac{h^2}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \left(h + \frac{h^2}{2}\right) + (h(1+o(1)))^2 + o(h^2)\right) = \frac{1}{2}\left(1 - h + \frac{h^2}{2} + o(h^2)\right),\end{aligned}$$

utilisant que $h + \frac{h^2}{2} = h(1+o(1)) \to 0$ et le développement limité usuel $(1+u)^{-1} = 1 - u + u^2 + o(u^2)$ quand $u \to 0$. On conclut alors que

$$\frac{1+h}{1+(1+h)^2} = \frac{1}{2}\left(1 - h + \frac{h^2}{2} + h - h^2 + o(h^2)\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{h^2}{2} + o(h^2)\right)$$

quand $h \to 0$, comme attendu.

(b) i. La fonction arcsin est bien définie sur $[-1,1]$, d'où f est bien définie. D'autre part, $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$ et arcsin est continue en 1, d'où $\lim_{y\to 0} f(y) = \frac{\pi}{2} - \lim_{y\to 0} \arcsin(1-y) = 0$.

ii. Appliquons la fonctions sin à l'égalité $\arcsin(1-y) = \frac{\pi}{2} - f(y)$, on obtient

$$1 - y = \sin\frac{\pi}{2}\cos(f(y)) - \cos\frac{\pi}{2}\sin f(y) = \cos(f(y)), \tag{$\star\star$}$$

par parité de cos et comme $\cos\frac{\pi}{2} = 0$. Maintenant, comme $f(y) \to 0$ quand $y \to 0$, on peut écrire $\cos f(y) = 1 - \frac{f(y)^2}{2} + o\big(f(y)^2\big)$, utilisant le développement limité usuel $\cos(u) = 1 - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$ quand $u \to 0$; toujours pour $y \to 0$, on obtient alors par $(\star\star)$ que $f(y)^2 = 2y(1+o(1))$, d'où on a

$$f(y) = \sqrt{2y(1+o(1))} = (1+o(1))\sqrt{2y}$$

comme $y \geq 0$ et $f(y) \geq 0$, ce qui conclut. *Rappel* : $\forall a, b \geq 0, \sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$.

(c) Posant $x = 1 + h$, on a bien que

$$g(1+h) = \arcsin\left(2 \times \frac{1+h}{1+(1+h)^2}\right) = \arcsin\left(1 - \left(\frac{h^2}{2} + o(h^2)\right)\right) = \frac{\pi}{2} - f\left(\frac{h^2}{2}(1+o(1))\right) = \frac{\pi}{2} - |h| + o(h)$$

quand $h \to 0$ (i.e. $x \to 1$), ce qui conclut. La deuxième égalité utilise la question 3(a), tandis que la dernière utilise 3(b)ii (⚠ $\sqrt{y^2} = |y|$ ⚠).

(d) Par imparité de g, il suffit de montrer le résultat en 1. Par la question précédente, on a

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{g(1+h) - g(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{-|h| + o(h)}{h} = -1 \text{ et } \lim_{h\to 0^-} \frac{g(1+h) - g(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-|h| + o(h)}{h} = 1,$$

car $g(1) = \frac{\pi}{2}$. D'où g n'est pas dérivable en 1.