Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2018-2019
Cursus préparatoire : Fondamentaux des Mathématiques 2 6 février 2019

Devoir surveillé n°1
Durée : 1h30

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les réponses aux exercices doivent donc être clairement rédigées. Le détail des calculs doit apparaître sur la copie. La présentation doit être la plus soignée possible. Enfin, si vous pensez avoir repéré une erreur d'énoncé, signalez-le sur la copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre. La calculatrice est interdite.

Exercice 1 Mettre la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 8 & 12 \\ 2 & 14 & 16 & 29 \\ 3 & 14 & 17 & 33 \end{pmatrix}$$

sous forme échelonnée (en lignes) et déterminer son noyau.

Exercice 2

1. Montrer que la matrice
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$
satisfait $A^3 = -A^2 + A + I$, où I désigne la matrice identité de $M_3(\mathbb{R})$.
2. En déduire que A est inversible et calculer son inverse A^{-1} (Indication : on pourra commencer par exprimer A^{-1} en fonction de A^2, A et I).
3. Retrouver ce résultat par la méthode du pivot de Gauss.
4. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad A^n = \frac{1}{4}\left(a_n A^2 + b_n A + c_n I\right),$$
où $a_n = (-1)^n(2n-1)+1$, $b_n = 2\left(1+(-1)^{n+1}\right)$ et $c_n = (-1)^{n+1}(2n-3)+1$.

Exercice 3 Soit $f : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ une fonction croissante. (Attention, f n'est pas nécessairement continue). On suppose qu'il existe $l \in [0,1]$ tel que $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = l$.

1. Dans cette question, on suppose que $l \in [0,1[$. On veut alors montrer qu'il existe $x_0 \in [0,+\infty[$ point fixe de f, c'est à dire satisfaisant $f(x_0) = x_0$.
   (a) Écrire précisément avec des quantificateurs ce que l'on veut dire par $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = l$.
   (b) En déduire qu'il existe $x \in [0,+\infty[$ tel que $f(x) \leq x$.
   (c) Justifier que l'ensemble $E = \{x \in [0,+\infty[\mid f(x) \leq x\}$ admet une borne inférieure $b \in [0,+\infty[$.
   (d) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de points de E convergeant vers b.
      i. Montrer que
      $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(b) \leq f(x_n).$$
      ii. Montrer que $f(b) \leq b$.
   (e) On veut montrer dans cette question que
   $$f(b) \geq b. \qquad (\star)$$
      i. On suppose $b = 0$. Montrer $(\star)$.
      ii. On suppose $b > 0$. Montrer que pour tout $\varepsilon \in]0,b]$, on a $f(b-\varepsilon) > b - \varepsilon$. Montrer $(\star)$.

(f) Conclure.

2. Dans cette question, on suppose que $l = 1$. A-t-on nécessairement l'existence d'un point fixe de f ? Justifier.

Exercice 4 On considère la fonction g donnée par $g(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$.

1. Justifier que g est une fonction impaire, bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}\,, \quad g'(x) = \begin{cases} \frac{2}{1+x^2} \text{ si } |x| \leq 1\,, \\ -\frac{2}{1+x^2} \text{ sinon}\,. \end{cases}$$

3. L'objectif de cette question est d'étudier le comportement de g au voisinage de 1 ou -1.

(a) Montrer que

$$\frac{1+h}{1+(1+h)^2} = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4} + o\left(h^2\right)$$

quand $h \to 0$ (Indication : on pourra utiliser des développements limités usuels ou le théorème de Taylor-Young).

(b) Soit $f : [0, 2] \to [0, \pi]$ donnée par $f(y) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(1 - y)$.

i. Justifier rapidement que f est bien définie et que $\lim_{y\to 0} f(y) = 0$.

ii. Montrer que $f(y) = \sqrt{2y} + o\left(\sqrt{y}\right)$ quand $y \to 0$.

(c) Montrer que $g(x) = \frac{\pi}{2} - |x - 1| + o(x - 1)$ quand $x \to 1$.

(d) Montrer que g n'est dérivable ni en 1, ni en -1.