Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2018-2019
Cursus préparatoire — Fondamentaux des mathématiques 2

Devoir maison — Corrigé

Exercice 1
Montrer que $\dfrac{(\operatorname{ch} x)^{\cos x} - (\cos x)^{\operatorname{ch} x}}{\ln(1+x^2)} = 1 + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{37}{180}x^4 + o(x^4)$ lorsque $x \to 0$.

Prenons les choses morceau par morceau, en commençant avec $(\operatorname{ch} x)^{\cos x} = \exp(\cos x \cdot \ln(\operatorname{ch} x))$. On va faire un développement limité à l'ordre 6 :

$$\begin{aligned}
\ln(\operatorname{ch} x) &= \ln\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{720} + o(x^6)\right) \\
&= \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{720}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{720}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{720}\right)^3 + o(x^6) \\
&= \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{720} - \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{24}\right) + \frac{1}{3}\cdot\frac{x^6}{8} + o(x^6) \\
&= \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + \frac{x^6}{45} + o(x^6).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\cos x \cdot \ln(\operatorname{ch} x) &= \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)\right)\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + \frac{x^6}{45} + o(x^6)\right) \\
&= \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + \frac{x^6}{45} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{24} + \frac{x^6}{48} + o(x^6) \\
&= \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{3} + \frac{61}{720}x^6 + o(x^6).
\end{aligned}$$

En composant avec l'exponentielle,

$$\begin{aligned}
(\operatorname{ch} x)^{\cos x} &= \exp\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{3} + \frac{61}{720}x^6 + o(x^6)\right) \\
&= 1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{3} + \frac{61}{720}x^6\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{3} + \frac{61}{720}x^6\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{3} + \frac{61}{720}x^6\right)^3 + o(x^6) \\
&= 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{3} + \frac{61}{720}x^6 + \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{3}\right) + \frac{1}{6}\cdot\frac{x^6}{8} + o(x^6) \\
&= 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{5}{24}x^4 - \frac{11}{180}x^6 + o(x^6).
\end{aligned}$$

De même, on calcule

$$(\cos x)^{\operatorname{ch} x} = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{5}{24}x^4 + \frac{11}{180}x^6 + o(x^6),$$

et donc

$$(\operatorname{ch} x)^{\cos x} - (\cos x)^{\operatorname{ch} x} = x^2 - \frac{11}{90}x^6 + o(x^6).$$

Pour le dénominateur de la fraction proposée, on a directement

$$\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + o(x^6),$$

ce qui donne

$$\frac{(\operatorname{ch} x)^{\cos x} - (\cos x)^{\operatorname{ch} x}}{\ln(1+x^2)} = \frac{1 - \frac{11}{90}x^4 + o(x^4)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{3} + o(x^4)}.$$

Pour enfin trouver le développement limité de ce quotient, on peut soit utiliser la division euclidienne suivant les puissances croissantes, soit appliquer la formule $\frac{1}{1-u}$. Avec cette dernière méthode, écrivons ainsi

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{3}+o(x^4)} &= 1+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{3}\right)+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{3}\right)^2+o(x^4)\\ &= 1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+o(x^4).\end{aligned}$$

Il vient donc

$$\begin{aligned}\frac{(\operatorname{ch} x)^{\cos x}-(\cos x)^{\operatorname{ch} x}}{\ln(1+x^2)} &= \left(1-\frac{11}{90}x^4+o(x^4)\right)\left(1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+o(x^4)\right)\\ &= 1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}-\frac{11}{90}x^4+o(x^4),\end{aligned}$$

Finalement, on obtient la réponse demandée :

$$\boxed{\frac{(\operatorname{ch} x)^{\cos x}-(\cos x)^{\operatorname{ch} x}}{\ln(1+x^2)} = 1+\frac{x^2}{2}-\frac{37}{180}x^4+o(x^4) \text{ quand } x\to 0}$$

Exercice 2

Pour $n\in\mathbf{N}$, on considère la fonction définie par

$$f_n : x \longmapsto \frac{x^n \ln x}{x^2-1}.$$

1. Déterminer le domaine de définition D_n de la fonction f_n, puis justifier que f_n est continue et dérivable sur D_n.
2. Déterminer le développement limité de f_n à l'ordre 2 au voisinage de 1.
3. Montrer que f_n est prolongeable par continuité en 1. Quelle est la valeur en 1 du prolongement ? *On continue de noter f_n la fonction ainsi prolongée.*
4. Montrer que f_n est dérivable en 1. Quelle est la valeur de sa dérivée en 1 ?
5. Quelle est l'équation de la tangente au graphe de la fonction f_n au point d'abscisse 1 ? Quelle est la position de la tangente par rapport à ce graphe au voisinage de 1 ?
6. La fonction f_n est-elle prolongeable par continuité en 0 ? Si oui, est-elle dérivable (à droite) en 0 ?
7. Faire des dessins illustrant les différents résultats obtenus.

1. Comme la fonction ln est définie sur $]0,+\infty[$ et comme le dénominateur x^2-1 ne s'annule qu'en 1 et -1, on voit immédiatement que f_n est définie sur $D_n =]0,+\infty[\setminus\{1\}$. D'après les théorèmes généraux, le numérateur et le dénominateur de f_n sont des fonctions dérivables sur D_n, le dénominateur ne s'annulant pas, et donc f_n est également dérivable (et donc continue) sur D_n.

2. Posons $x=1+h$. Alors

$$f_n(n) = f_n(1+h) = \frac{(1+h)^n\ln(1+h)}{(1+h)^2-1} = \frac{(1+h)^n\ln(1+h)}{2h+h^2}.$$

La quantité $(1+h)^n$ est un polynôme en h, dont la forme développée est donnée par la formule du binôme :

$$(1+h)^n = 1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2+\binom{n}{3}h^3+\cdots+h^n.$$

Ainsi, on a $(1+h)^n = 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2 + o(h^2)$ quand $h \to 0$. Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\ln(1+h)}{2h+h^2} &= \frac{h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + o(h^3)}{2h+h^2} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{3} + o(h^2)}{1 + \frac{h}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{3} + o(h^2)\right)\left(1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4} + o(h^2)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4} - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4} + \frac{h^2}{3} + o(h^2)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - h + \frac{5}{6}h^2 + o(h^2)\right)
\end{aligned}$$

Multiplions par le développement limité de $(1+h)^n$ pour obtenir celui de f_n :

$$\begin{aligned}
f_n(1+h) &= \frac{1}{2}\left(1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2 + o(h^2)\right)\left(1 - h + \frac{5}{6}h^2 + o(h^2)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - h + \frac{5}{6}h^2 + nh - nh^2 + \frac{n(n-1)}{2}h^2\right),
\end{aligned}$$

d'où finalement

$$\boxed{f_n(1+h) = \frac{1}{2} + \frac{n-1}{2}h + \frac{3n^2 - 9n + 5}{12}h^2 + o(h^2) \text{ quand } h \to 0}$$

3. Le développement limité précédent montre que $f_n(1+h) \to \frac{1}{2}$ lorsque $h \to 0$, c'est-à-dire que $f_n(x) \to \frac{1}{2}$ quand $x \to 1$. Cela montre que f_n peut se prolonger par continuité en 1 en posant $f_n(1) = \frac{1}{2}$.

4. L'existence d'un développement limité de f_n à l'ordre 1 au voisinage de 1 montre que (le prolongement de) la fonction f_n est dérivable en 1, et que

$$\boxed{f_n'(1) = \frac{n-1}{2}}$$

5. On sait alors que la tangente au graphe de f_n au point d'abscisse 1 a pour équation

$$\boxed{y = \frac{1}{2} + \frac{n-1}{2}(x-1)}$$

Par ailleurs, comme on a

$$f_n(1+h) - \left(\frac{1}{2} + \frac{n-1}{2}h\right) = \frac{3n^2 - 9n + 5}{12}h^2 + o(h^2),$$

on sait que le membre est du même signe que $\dfrac{3n^2 - 9n + 5}{12}h^2$ au voisinage de 0, ce qui est donc du signe de $3n^2 - 9n + 5$. Or, un calcul rapide montre que le polynôme $3X^2 - 9X + 5$ a deux racines réelles X_1 et X_2, avec $0 < X_1 < 1$ et $X_2 > 2$, de sorte que $3n^2 - 9n + 5$ est négatif pour $n = 1$ ou 2, et positif sinon. Par conséquent :

> La tangente est située au dessus du graphe au voisinage de 1 lorsque $n = 0$ ou $n \leqslant 3$, et elle est située en dessous du graphe si $n = 1$ ou 2.

6. Si $n = 0$, on voit immédiatement que $f_n(x) \to +\infty$ lorsque $x \to 0^+$. En revanche, d'après le théorème des croissances comparées, $f_n(x) \to 0$ quand $x \to 0^+$ dans le cas où $n \geqslant 1$. Ainsi,

> La fonction f_n est prolongeable par continuité en 0 si et seulement si $n \geqslant 1$, auquel cas le prolongement est obtenu en posant $f_n(0) = 0$.

Supposons donc $n \geqslant 1$. On a alors

$$\frac{f_n(x) - f_n(0)}{x} = \frac{x^{n-1}\ln x}{x^2 - 1}.$$

Comme précédemment, cette quantité a une limite finie quand $x \to 0^+$ si et seulement si $n - 1 \geqslant 1$, auquel cas la limite vaut 0 :

> La fonction f_n est dérivable à droite en 0 si et seulement si $n \geqslant 2$, auquel cas on a $f_n'(0) = 0$.

7.

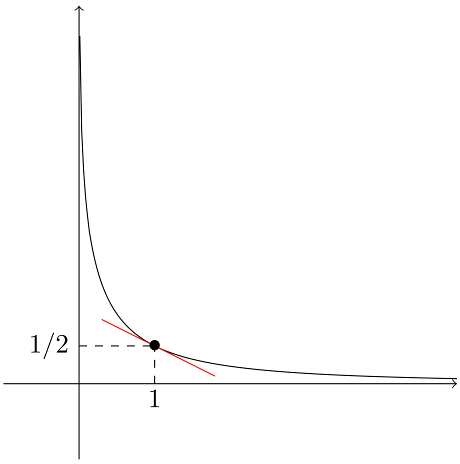

Figure 1 – Cas $n = 0$. La fonction n'est pas prolongeable par continuité en 0, et le graphe est au-dessus de la tangente au voisinage de 1.

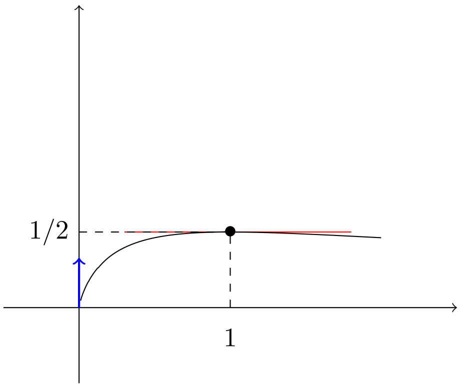

Figure 2 – Cas $n = 1$. La fonction est prolongeable par continuité en 0 mais il y a une demi-tangente verticale : le prolongement n'est pas dérivable en 0^+ ; le graphe est en-dessous de la tangente au voisinage de 1.

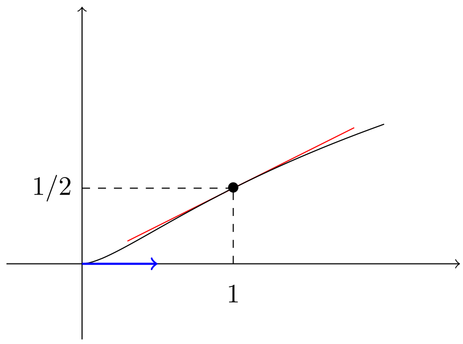

FIGURE 3 – Cas $n = 2$. La fonction est prolongeable par continuité en 0 et le prolongement est dérivable en 0^+ ; le graphe est en-dessous de la tangente au voisinage de 1.

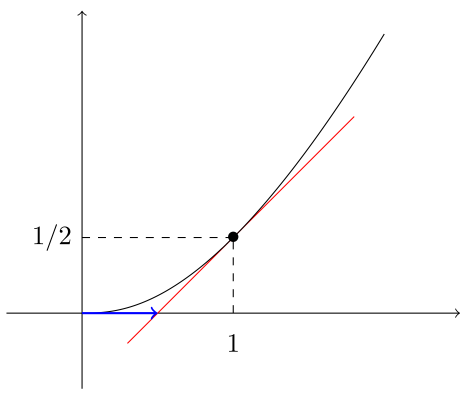

FIGURE 4 – Cas $n \geqslant 3$. La fonction est prolongeable par continuité en 0 et le prolongement est dérivable en 0^+ ; le graphe est au-dessus de la tangente au voisinage de 1.