Fiche 2 - Calcul de probabilités

1 - Quelques exercices théoriques

Exercice 1. Soit P une probabilité sur un ensemble Ω et deux événements A et B. On suppose que

$$P(A \cup B) = \tfrac{7}{8}, \quad P(A \cap B) = \tfrac{1}{4}, \quad P(A) = \tfrac{3}{8}$$

Calculer $P(B)$, $P(A \cap \overline{B})$ et $P(B \cap \overline{A})$.

Exercice 2. Soit une expérience aléatoire modélisée par un univers Ω et une probabilité P. Soient A, B et C trois événements tels que $P(A) = 0.7$, $P(B) = 0.2$ et $P(C) = 0.3$. De plus, A et B sont indépendants, et B et C sont incompatibles.

1. Calculer $P(A \cup B)$.
2. Calculer $P(B \cup C)$.
3. Calculer $P(B|\overline{C})$.
4. Quelle est la probabilité pour que, à la fois, B et C soient réalisés.
5. Quelle est la probabilité pour que les trois événements aient lieu en même temps.

Exercice 3. *Egalité d'inclusion-exclusion*
Soient A et B deux événements d'un espace Ω. Montrer que :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Exercice 4. Soient A, B et C trois événements deux à deux indépendants et tels que $P(C) > 0$.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur A, B et C pour que A et B soient indépendants relativement à la probabilité conditionnelle $P(\dot{|}C)$.

2 - Problème de probabilités

Dans les exercices qui suivent, sauf mention contraire, l'univers est muni de la probabilité uniforme

Exercice 5. Un nouveau vaccin a été testé sur 12500 personnes; 75 d'entre elles, dont 35 femmes enceintes, ont eu des réactions secondaires nécessitant une hospitalisation. Parmi les 12500 personnes testées, 680 personnes sont des femmes enceintes.

1. Quelle est la probabilité pour une femme enceinte d'avoir une réaction secondaire si elle reçoit un vaccin?

2. Quelle est la probabilité pour une personne non enceinte d'avoir une réaction secondaire?

Exercice 6. Dans une promotion de n étudiants, quelle est la probabilité de l'événement suivant : "Deux étudiants au moins sont nés le même jour?".

Exercice 7. On tire simultanément et au hasard 13 cartes dans un jeu de 52 cartes. Calculer que parmi ces 13 cartes, il y ait :

1. exactement un roi;

2. au moins un roi.

Exercice 8. *Paradoxe du chevalier de Méré (1607-1684)*

1. Calculer la probabilité d'obtenir au moins une fois 1 en lançant 4 dés équilibrés.

2. Calculer la probabilité d'obtenir au moins une fois un double 1 en lançant 24 fois deux dés équilibrés.

Exercice 9. Soit $n \geq 2$ un entier. Sur un parking de n places alignées, $n-2$ voitures se garent au hasard. Quelle est la probabilité que deux places libres se trouvent côte à côte.

Exercice 10. Alors qu'ils ne représentent que 13% de la population, les jeunes de 18 à 24 ans représentent 30% des tués sur la route. Si on dit qu'un jeune a x fois plus de risque de mourir sur la route qu'un autre usager, combien vaut x?

Exercice 11. *Paradoxe de Monty-Hall*
Supposez que vous êtes sur le plateau d'un jeu télévisé, face à trois portes et que vous devez choisir d'en ouvrir une seule, en sachant que derrière l'une d'elles se trouve une voiture et derrière les deux autres des chèvres (votre objectif est bien-sûr de découvrir la voiture). Vous choisissez une porte, et le présentateur, qui sait, lui, ce qu'il y a derrière chaque porte, ouvre une porte derrière laquelle se cache une chèvre (le jeu lui impose de toujours démasquer une chèvre lors de ce premier tour du jeu). Le présentateur se tourne vers vous et vous laisse le choix : soit vous changez de porte, soit vous conservez votre choix initial. Que faites-vous?

Exercice 12. Deux joueurs jouent à pile ou face avec une pièce bien équilibrée. Montrer que les trois événements suivants sont deux à deux indépendants mais qu'ils ne sont pas indépendants dans leur ensemble :

1. A : "La pièce du premier joueur tombe sur pile";
2. B : "La pièce du second joueur tombe sur face";
3. C : "Les deux pièces tombent du même côté".

Exercice 13. La couleur des yeux d'une personne est déterminée par 2 gènes dont l'un est transmis par le père et l'autre par la mère. On suppose pour simplifier qu'il y a deux formes possibles pour ces gènes : la forme `B` (bleue) et la forme `M` (marron). La forme `B` est récessive c'est-à-dire qu'une personne qui a le génotype `BM` a les yeux marrons. Les parents de Alain ont tous deux les yeux marrons mais sa sœur a les yeux bleus.

1. Quelle est la probabilité pour que Alain ait les yeux marrons ?
2. On suppose en plus que l'épouse de Alain a les yeux bleus tandis que son premier enfant a les yeux marrons. Quelle est la probabilité pour que son second enfant ait les yeux bleus ?

Exercice 14. Dans un cours de danse, il y a 40 personnes : 20 femmes et 20 hommes. On demande aux danseurs et aux danseuses de former des couples au hasard, sans forcément que ces couples soient mixtes.

1. Quelle est la probabilité qu'aucun des vingt couples formés ne soient mixtes?
2. Quelle est la probabilité que tous les couples soient mixtes?
3. Donner une valeur approchée des deux probabilités calculées précédemment en utilisant l'équivalent de Stirling :

$$n! \simeq \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$$

Exercice 15. Trois personnes lancent successivement et à tour de rôle un dé à six faces. La partie s'arrête lorsque l'une des personnes gagne en obtenant un six.

1. Pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, calculer la probabilité que la partie s'arrête au r-ème lancer.
2. On suppose que r est de la forme $r = 3k$. Calculer la probabilité qu'entre le premier et le r-ème lancer, la personne qui a commencé la partie gagne le jeu.
3. En déduire la probabilité que la personne qui a commencé gagne le jeu.
4. Calculer de même la probabilité que les autres personnes ont de gagner.

Compléments bis à la Fiche 2
Calcul de probabilités

Exercice 1. On suppose que les 52 cartes d'un jeu, bien brassées, sont retournées jusqu'à l'apparition du premier as. Qu'elle est la probabilité que la carte suivante soit :

1. le 2 de trèfle?
2. l'as de pique?

Exercice 2. Un jeu de 52 cartes est ditribuée aléatoirement à 4 joueurs (13 cartes chacuns). Soit E_i l'événement : "le joueur i a exactement un as". Calculer $p = P(E_1 \bigcap E_2 \bigcap E_3 \bigcap E_4)$.

Exercice 3. Trois dés à six faces (un rouge, un bleu, un jaune) sont lacés. On s'intéresse à la probabilité que le nombre du dé bleu soit strictement inférieur à celui du dé jaune, et que lui même soit inférieur à celui du dé rouge. Si l'on note B, J, R les résultats obtenus par les trois dés, on s'intéresse donc à la probabilité $P\{B < J < R\}$.

1. Avec quelle probabilité les chiffres sur les trois dés sont-ils différents?
2. En déduire la valeur de $P\{B < J < R\}$.

Exercice 4. Dans une certaine ville, 36% des familles ont un chien et 22% de celles qui ont un chien ont aussi un chat. De plus, 30% des familles ont un chat. De plus, 30% des familles de la ville ont un chat. Quelle est

1. la probabilité qu'une famille sélectionnée au hasard possède un chien et un chat?
2. la probabilité qu'une famille sélectionnée au hasard parmi celles qui possèdent un chat, possède un chien ?

Compléments à la Fiche 2
Calcul de probabilités

Exercice 1. On admet que 5% des hommes et 0.25% des femmes sont daltonien-ne-s. On sélectionne une personne daltonienne au hasard. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un homme? On admettra que, dans la population, les hommes sont aussi nombreux que les femmes.

Exercice 2. Dans une académie, on souhaite estimer le nombre moyen d'élèves par classe. Laquelle des méthodes suivantes permet de faire cette estimation? Justifier votre réponse.

1. On choisit aléatoirement n élèves et on demande le nombre d'élèves de leur classe. On fait ensuite la moyenne des n valeurs obtenues.

2. On choisit aléatoirement n professeurs principaux de l'Académie et on leur demande le nombre d'élèves de la classe dont ils sont professeur principal. On fait ensuite la moyenne des n valeurs obtenues.

Exercice 3. On suppose que les 52 cartes d'un jeu, bien brassées, sont retournées jusqu'à l'apparition du premier as. Sachant que cela arrive à la vingtième carte, qu'elle est la probabilité conditionnelle que la carte suivante soit :

1. le 2 de trèfle?

2. l'as de pique?