**Math L2 / Unité d'enseignement ≪ Analyse IV ≫**

**devoir surveillé / lundi 26 mars 2018 / durée 66 minutes**

*L'utilisation de documents de toute nature, de calculettes, et de téléphones n'est pas autorisée.*

*Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix.*

**1.** Soient $(E, \| \ \|_E)$ et $(F, \| \ \|_F)$ deux espaces vectoriels normés et soit $f : E \to F$ une fonction continue.

(a) Montrer que si $C \subset E$ est compact, alors $f(C)$ est un fermé.

(b) Montrer que si $f$ est surjective, et si $A \subset E$ est dense dans $E$, alors $f(A)$ est dense dans $F$.

**2.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) := \dfrac{nxe^{-nx}}{1+x^n}$.

(a) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.

(b) Soit $a > 0$ et $r > a$. Montrer que la série de fonctions converge uniformément sur $[a, r]$.

(c) Montrer que la suite $(f_n)$ ne converge pas uniformément vers 0 sur $[0, 1]$.

(d) Étudier la convergence uniforme et normale de la série de fonctions $\sum f_n$ sur $[0, 1]$.

**Correction de l'Exer. 1 :**

(a) Soit $(f(c_i))$ une suite dans $f(C)$ (donc les $c_i$ appartiennent à $C$) qui converge vers une limite $\ell$. On montre que $\ell \in f(C)$, vérifiant ainsi que $f(C)$ est fermé par le critère séquentielle. Or la suite $(c_i)$ admet une sous-suite $(c_{n_i})$ qui converge vers une limite $\bar{c} \in C$ (car $C$ est compact). Alors $f(c_{n_i})$ converge vers $f(\bar{c})$ (car $f$ est continue), mais aussi vers $\ell$ (c'est une sous-suite de le suite $(f(c_i))$, qui converge vers $\ell$ par hypothèse). Il vient que $\ell = f(\bar{c}) \in f(C)$.

(b) On se donne un point quelconque $\bar{w} \in F$, et on montre qu'il existe une suite dans $f(A)$ qui tend vers $w$. (Ceci prouve que tout point dans $F$ est dans l'adhérence de $f(A)$.) Or il existe un point $\bar{x} \in E$ tel que $f(\bar{x}) = w$ (car $f$ est surjective). Et il existe une suite $(a_i)$ dans $E$ qui tend vers $\bar{x}$ (car $A$ est dense dans $E$). Enfin, $f(a_i)$ converge vers $f(\bar{x}) = w$ par la continuité de $f$.

**Correction de l'Exer. 2 :**

(a) Il est clair que la série converge pour $x = 0$, puisque $f_n(0) = 0 \forall n$. Pour $x > 0$, on a $0 \leq f_n(x) \leq nxe^{-nx}$. Mais la série engendrée par les termes $nxe^{-nx}$ converge, par exemple par le critère de d'Alembert :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)xe^{-(n+1)x}}{nxe^{-nx}} = e^{-x} < 1.$$

(*Alternatif* : observer que $e^{-nx} = O\left(n^{-3}\right)$ et utiliser la comparaison avec $1/n^2$.)

(b) Pour $x \in [a,r]$, on a $0 \leq x \leq r$ et $e^{-nx} \leq e^{-na}$, ainsi que $1 + x^n \geq 1$. On trouve alors

$$\|f_n(x)\|_{\infty,[a,r]} = \sup_{a\leq x\leq r} \frac{nxe^{-nx}}{1+x^n} \leq nre^{-na}.$$

Ces derniers termes donnent lieu à une série convergente, par exemple par le critère de d'Alembert, ou par comparaison, comme dans la partie précédente.

(c) On a $\|f_n\|_{\infty,[0,1]} \geq f_n(1/n) = \dfrac{e^{-1}}{1+(1/n)^n} \to e^{-1}$, d'où la non convergence uniforme de $f_n$ vers 0.

(d) Le fait que $f_n(1/n)$ ne converge pas vers 0 (partie précédente) exclut la possibilité de convergence normale ou uniforme. (*Alternatif* : montrer que le reste $R_n$ ne converge pas uniformément vers 0, ce qui exclut et la convergence uniforme et la convergence normale.)