Fiche 2

Exercice 1 (Convergence dans les espaces normés)

1. Déterminer la limite de la suite suivante dans $\mathbb{R}^3$: $\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right), \cos\left(1-\frac{1}{n^2}\right), \tan\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) \right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. Munissez l'espace vectoriel des matrices 3×3 à entrées réelles ($\mathcal{M}_{3\times 3}(R)$) d'une norme. Calculer la limite de la suite $(A^n/(-4)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans cet espace. *(On peut penser à diagonaliser A pour calculer ses puissances.)*
3. On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels de deux normes N_1 et N_2 en faisant les définitions suivantes : si $P = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n$ alors $N_1(P) = |a_0 + P'(1)| + \sum_{i=1}^n |a_i|$ et $N_2(P) = \sup_{0\le x\le 1} |P(x)|$. Vérifier que ces fonctions définissent des normes. Déterminer ensuite la limite de la suite $(1 - X^n/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par rapport à chacune des deux normes. Quelle est votre conclusion ?
4. Soit E l'espace vectoriel des fonctions polynômiales de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$. On définit $N_1(P) = \sup_{0\le x\le 1} |P(X)|$ et $N_2(P) = N_1(P) + N_1(P')$. On a vu dans la première fiche que ce sont des normes.
   a. Calculer $N_2(x \mapsto x^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   b. Quelle conclusion en tire-t-on pour la convergence de la suite de fonctions $(x \mapsto x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ par rapport à la norme N_2 ?

Exercice 2 (Convergence dans les espaces de fonctions) On se place dans l'espace vectoriel réel $E = \mathcal{C}([0;1], \mathbb{R})$ et on considère N définie par :

$$N(f) = \int_0^1 e^x |f(x)| dx \text{ pour tout } f \in E.$$

1. Montrer que N est une norme sur E.
2. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ telle que $f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & \text{si } x \in \left[0; \frac{1}{n}\right] \\ 0 & \text{si } x \in \left[\frac{1}{n}; 1\right] \end{cases}$.
   (a) Pour un $n \in \mathbb{N}^\star$, tracer la courbe de f_n.
   (b) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers la fonction nulle dans (E, N).
   (c) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ ne converge pas vers la fonction nulle dans $(E, \|.\|_\infty)$.
   (d) Les normes N et $\| \|_\infty$ sont-elles équivalentes ?

Exercice 3 (Convergence dans l'espace des polynômes) On note $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et on considère une suite de réels $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On définit deux applications N et N' sur E par :

$$\text{pour tout } P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in E, \quad N(P) = \sum_{k=0}^n \alpha_k |a_k| \quad \text{et } N'(P) = \max_{k\in\mathbb{N} \text{ et } 0\le k\le n} |a_k|.$$

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur la suite $(\alpha_n)_n$ pour que N définisse une norme sur E. On admet que N' définit une norme sur E.
2. Dans cette question, on suppose que la suite $(\alpha_n)_n$ est une suite de réels strictement positifs convergeant vers 0. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = X^n$. Étudier la convergence de la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour N.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $Q_n = 1 + X + \cdots + X^n$. Étudier la convergence de la suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour N'.