Université Claude Bernard, Lyon I
43, boulevard 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies
Spécialité Mathématiques
Analyse IV
Année 2015/2016

Série 7 :
Intégrales dépendant d'un paramètre

Exercice I. Intégrale sur un intervalle compact de $\mathbb{R}$ (continuité)

On souhaite calculer l'intégrale suivante

$$J = \int_0^1 \frac{dt}{(t^2+1)^2}.$$

Nous allons le faire de deux façons.

1. **Méthode 1.** Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $t \in [0,1]$ on considère f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^* \times [0,1]$, et I la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f(x,t) = \frac{1}{(t^2+1)(t^2+x^2)}, \text{ et } I(x) = \int_0^1 f(x,t)dt.$$

   (a) Montrer que I est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

   (b) Supposons $x \neq 1$, montrer que

$$f(x,t) = \frac{1}{x^2-1}.\frac{1}{t^2+1} - \frac{1}{x^2-1}.\frac{1}{t^2+x^2},$$

   puis calculer $I(x)$ et puis $I(1)$.

   (c) En déduire la valeur de l'intégrale J.

2. **Méthode 2.** Calculer directement I en faisant le changement de variable $t = \tan(\theta)$.

Exercice II. Intégrale sur un intervalle compact de $\mathbb{R}$ (dérivabilité)

Soit F la fonction définie par

$$F(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 + x^2 - 2x\cos(\theta))d\theta.$$

1. Montrer que F est continue et dérivable sur l'intervalle $]-1,1[$.
2. Calculer F' sur l'intervalle $]-1,1[$. Indication : on pourra procéder au changement de variable $t = \tan(\frac{\theta}{2})$.
3. En déduire F sur l'intervalle $]-1,1[$.

Exercice III. Intégrale sur un intervalle compact de $\mathbb{R}$ (dérivabilité)

On considère F définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$F(x) = \int_0^{\pi} \sqrt{|1 - x\cos(t))|}dt.$$

1. Vérifier que F est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ et que F est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F est paire.
3. Montrer que F est deux fois dérivable pour tout $x \in]-1, 1[$ et qu'elle vérifie la relation
$$4x(x^2-1)F''(x) + 4(x^2-1)F'(x) - xF(x) = \int_0^{\pi} R(t, x)dt,$$
où
$$R(t, x) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{2\sin(t)}{\sqrt{1 - x\cos(t)}}\right).$$
4. En déduire que F vérifie l'équation différentielle
$$4x(x^2-1)F''(x) + 4(x^2-1)F'(x) - xF(x) = 0.$$

Exercice IV. Intégrale sur un intervalle non compact de $\mathbb{R}$ (continuité)

1. On considère la fonction f définie pour tout $(x, t) \in]0, +\infty[\times[0, +\infty[$ par
$$f(x, t) = \frac{e^{-xt}}{1 + t^2}.$$
Montrer que la fonction F définie pour tout $x \in]0, +\infty[$ par
$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1 + t^2}dt,$$
est continue sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que la fonction F définie pour tout $x \in [0, +\infty[$ par
$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}e^{-xt}dt,$$
est continue sur $[0, +\infty[$.

Exercice V. Intégrale sur un intervalle non compact de $\mathbb{R}$ (dérivabilité)

1. On définit pour tout $x \in [0, +\infty[$, la fonction F par
$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} dt,$$
comme dans l'exercice précédent.
   (a) Calculer la dérivée de F en tout point non nul .
   (b) En déduire $F(x)$. Et de la continuité de F en 0 déduire
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt.$$

2. On introduit maintenant pour tout $x \in \mathbb{R}$ la fonction F définie par
$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{1+t^2} dt.$$
   (a) Montrer que cette intégrale existe pour tout $x \in \mathbb{R}$ et que F est continue bornée sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que F est paire et calculer $F(0)$.
   (c) Montrer que pour tout $x > 0$, on a $F(x) = xG(x)$, où G est donnée par
$$G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u^2 + x^2} du.$$
   (d) Montrer que G est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et exprimer G' et G'' sous la forme d'intégrales généralisées dépendant du paramètre $x \in]0, +\infty[$.
   (e) En déduire que F est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et que sa dérivée seconde est donnée par
$$F''(x) = x \int_0^{+\infty} \frac{2x^2 - 6u^2}{(u^2 + x^2)^3} \cos(u) du.$$
   (f) Montrer que pour tout $(u, x) \neq (0, 0)$ les fonction h et k définies par
$$h(u, x) = \frac{2x^2 - 6u^2}{(u^2 + x^2)^3}, \text{ et } k(u, x) = \frac{-1}{u^2 + x^2},$$
vérifient la condition
$$h(u, x) = \frac{\partial^2 k}{\partial u^2}(u, x).$$
   (g) En déduire que F vérifie sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle $F'' = F$.
   (h) En déduire que F est de la forme
$$F(x) = ae^x + be^{-x}, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad x \in]0, +\infty[.$$
   (i) Calculer a et b en fonction des résultats obtenus dans les 3 premières questions et en déduire une expression de F valable pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice VI. Fonction Gamma

Soit f une fonction indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ telle $f(0) = 1$ et $0 \leq f(t) < 1$ pour tout $t \in]0, 1]$. On note

$$g(x) = \sup_{t\in[x,1]} f(t),$$

pour $x \leq 1$.

1. Pour quelles valeurs réelles de α l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt$ existe-t-elle ?

   On note $\Gamma(1 - \alpha)$ la valeur de cette intégrale généralisée si elle existe.

2. Montrer que si $x \in]0, 1]$, alors $g(x) < 1$.

3. Montrer que $f'(0) \leq 0$.

   Désormais on fixe un réel $\alpha \in]0, 1]$. On suppose que $f'(0) \neq 0$ et note $f'(0) = -\lambda$, avec $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

4. Montrer que

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t) - e^{-\mu t}}{t} = \mu - \lambda.$$

5. Soit $\mu > \lambda$.

   (a) Montrer à l'aide de la question 4) qu'il existe $x_\mu \in]0, 1]$ tel que $f(t) \geq e^{-\mu t}$ pour tout $t \in [0, x_\mu]$.

   (b) En déduire que pour $\mu > \lambda$,

$$\int_0^1 \frac{f^n(t)}{t^\alpha} dt \geq (n\mu)^{\alpha-1} \int_0^{n\mu x_\mu} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt.$$

   (c) En déduire que pour tout $\mu > \lambda$

$$\liminf_{n\to+\infty} n^{1-\alpha} \int_0^1 \frac{f^n(t)}{t^\alpha} dt \geq \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\mu^{1-\alpha}},$$

   puis que

$$\liminf_{n\to+\infty} n^{1-\alpha} \int_0^1 \frac{f^n(t)}{t^\alpha} dt \geq \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\lambda^{1-\alpha}},$$

6. On suppose maintenant que $0 < \mu < \lambda$.

   (a) Montrer à l'aide de la question 4) qu'il existe $x_\mu \in]0, 1]$ tel que $f(t) \leq e^{-\mu t}$ pour tout $t \in [0, x_\mu]$.

   (b) En déduire que pour $0 < \mu < \lambda$,

$$\int_0^1 \frac{f^n(t)}{t^\alpha} dt \leq (n\mu)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha) + \frac{r^n}{(x_\mu)^\alpha}(1 - x_\mu),$$

   où $r := g(x_\mu)$.

(c) En déduire que pour $0 < \mu < \lambda$,

$$\limsup_{n \to +\infty} n^{1-\alpha} \int_0^1 \frac{f^n(t)}{t^\alpha} dt \leq \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\mu^{1-\alpha}},$$

puis que

$$\limsup_{n \to +\infty} n^{1-\alpha} \int_0^1 \frac{f^n(t)}{t^\alpha} dt \leq \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\lambda^{1-\alpha}},$$

7. En déduire que

$$\int_0^1 \frac{f^n(t)}{t^\alpha} dt \sim \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\lambda^{1-\alpha} n^{1-\alpha}}, \quad n \to +\infty.$$

Exercice VII. Transformée de Laplace

Dans tout l'exercice on note $\mathscr{L}$ la transformée de Laplace définie pour tout $t \in I\!R^+$, et $f : I\!R^+ \to I\!R$ par

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

1. Calculer $\mathscr{L}\{1\}$, $\mathscr{L}\{t\}$, $\mathscr{L}\{e^{-3t}\}$, $\mathscr{L}\{\sin(2t)\}$.
2. Supposons f deux fois dérivable sur $I\!R^+$.
   Calculer $\mathscr{L}\{f'(t)\}$ et $\mathscr{L}\{f''(t)\}$.
3. Résoudre les deux équations différentielles suivantes
   (a) $x'(t) + 3x(t) = 13\sin(2t)$, avec $x(0) = 6$.
   (b) $x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = e^{-4t}$, avec $x(0) = 1$ et $x'(0) = 5$.