Université Claude Bernard, Lyon I
43, boulevard 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies
Spécialité Mathématiques
Analyse IV
Année 2015/2016

Fiche d'exercices n° 2 : Suites de fonctions

Exercice I : Convergence simple et uniforme
On étudie les suites de fonctions réelles définies par $f_n(x) = \dfrac{x}{x+n} + \arctan(x)$ et $g_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Ces suites convergent-elles simplement sur $[0,1]$?
2. Convergent-elles uniformément sur $[0,1]$? Sur $]0,1]$? Soit $a \in]0,1[$. Convergent-elles uniformément sur $[a,1]$?
3. Convergent-elles simplement et uniformément sur $[1,+\infty[$?

Exercice II : Convergence simple et uniforme
On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$ définies par $f_n(x) = \sin(nx^2)\exp(-nx^2)$.

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[-1,1]$ vers une fonction f qu'on déterminera.
2. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur $[0,1]$.
3. Montrer que pour tout $a > 0$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a,1]$.

Exercice III : Convergence simple et uniforme
On considère la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par $f_n(x) = \dfrac{x^n e^{-x}}{1+x^n}$. Etudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,1]$, puis sur $[0,1[$, puis sur $[0,a]$ avec $0 < a < 1$.

Exercice IV : Convergence et intégrales

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par $f_n(x) = \dfrac{2^n x}{1+2^n n x^2}$.

1. Etudier la convergence simple de cette suite de fonctions sur $[0,1]$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)dt$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$. En déduire que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas uniformément convergente sur $[0,1]$.
3. Donner une démonstration directe de ce que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas uniformément convergente sur $[0,1]$.

Exercice V : Convergence uniforme et dérivées

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie sur $[-1,1]$ par $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}$.

1. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[-1,1]$ vers 0.
2. Etudier la convergence de $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $[-1,1]$.
3. On considère la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie sur $[-1,1]$ par $g_n(x) = \dfrac{\ln(1+n^2x^2)}{2n^2}$. Montrer que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[-1,1]$ vers 0.

Exercice VI : Convergence uniforme et dérivées

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{1}{n}\mathrm{arctan}(x/n)$. Etudier la suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et un déduire que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur tout sous-ensemble borné de $\mathbb{R}$.