Université Claude Bernard - Lyon 1 SP 2015-2016
Analyse IV - Math2029L Mardi 3 mai 2016

DS2
Durée: 1 heure 30 minutes

I (6=3+3)

Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$, les séries suivantes convergent-elles ?
(a) $\sum \frac{x^{n-1}}{n \cdot 3^n}$, (b) $\sum \frac{n(x-1)^n}{2^n(3n-1)}$.
(On pourra d'abord déterminer les rayons de convergence des séries entières appropriées.)

II (8=3+4+1)

On considère la série des fonctions $\sum f_n(x)$, où $f_n(x) = nx^2 e^{-xn}$ définies sur $\mathbb{R}$.

1) Déterminer le domaine de sa convergence simple E.
2) Etudier sa convergence normale et sa convergence uniforme sur E.
3) (*Bonus*) Déterminer la fonction somme $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ pour tout $x \in E$.

III (9=1,5+1,5+2+2+1+1)

On considère une série entière $\sum a_n t^n$, de rayon de convergence $R > 0$, et de somme s. On suppose que s est une solution de l'équation difféerentielle

$$(1+t^2)f''(t) = 2f(t).$$

1) Etablir une relation liant pour chaque $n \in \mathbb{N}$ les coefficients a_n et a_{n+2}.
2) Déterminer la valeur de a_4 puis de a_{2p} pour $p > 2$.
3) On suppose désormais que $s(0) = 0$ et $s'(0) = 1$. Montrer que

$$s(t) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1} t^{2p+1}}{(2p-1)(2p+1)}.$$

4) Montrer que la série entière $\sum a_n t^n$ converge normalement sur l'intervalle $[-1, +1]$. Quel est son rayon de convergence ?
5) (*Bonus*) Posons $g(0) = 0$ et $g(t) = \frac{s'(t)-1}{t}$ pour $t \neq 0$. Calculer la dérivée g' de g.
6) (*Bonus*) Déduire de 5) une expression explicite de la fonction s.

Corrigé de I (6=3+3)

a) Soit $a_n = \frac{1}{n\cdot 3^n}$. On calcule
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1}\frac{1}{3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}.$$
Donc le rayon de convergence de $\sum a_n x^{n-1}$ est 3. C'est-à-dire qu'elle diverge pour $|x| > 3$ et converge pour $|x| < 3$. Si $x = 3$, la série $\sum \frac{1}{3n}$ diverge, si $x = -3$, la série $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{3n}$ est alternée avec les termes généraux $\frac{1}{3n}$ tendant vers 0 en décroissant, elle est donc convergente. En conclusion, la série converge si et seulement $x \in [-3, 3[$.

b) On considère la série entière $\sum a_n z^n$ avec $a_n = \frac{n}{2^n(3n-1)}$ et $z = x - 1$. Alors
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)(3n-1)}{2n(3n+2)} = \frac{1}{2}.$$
Ainsi la série converge pour $|x-1| < 2$ et diverge pour $|x-1| > 2$. Pour $|x-1| = 2$, le terme général ne tend vers pas vers 0 puisque $|a_n 2^n| = \frac{n}{3n-1} \to 1/3$ lorsque $n \to +\infty$. Donc la série converge seulement pour $|x-1| < 2$, c'est-à-dire $-1 < x < 3$.

Corrigé de II (8=3+4+1)

1) Si $x < 0$, alors $f_n(x) = nx^2e^{-xn} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et la série diverge ; si $x = 0$, la série converge ; si $x > 0$, on a
$$\sqrt[n]{f_n(x)} = x^{2/n}n^{1/n}e^{-x} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-x} < 1.$$
Par la règle de Cauchy la série converge. En conclusion, le domaine de convergence simple est $E = [0, +\infty[$.

2) On a $f_n'(x) = nx(2-nx)e^{-nx}$. Par le tableau de variation de f_n sur $[0, +\infty[$ on voit que
$$||f_n(x)||_\infty = f_n(2/n) = \frac{2}{n}e^{-2}.$$
Donc $\sum ||f_n(x)||_\infty$ diverge et la série ne converge pas normalement. Pour la convergence uniforme, on raisonne par absurde. On remarque que
$$S(1/n) \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k}{n^2}e^{-k/n} \geq \frac{n(n+1)}{n^2}e^{-2} \geq e^{-2},$$
ce qui montre que $S(1/n) \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$. (On pourra aussi raisonner sur le reste $R_n(1/n)$.) Or $S(0) = 0$, donc $S(x)$ n'est pas continue en 0 et la série ne converge pas uniformément sur E.

3) Il est clair que $S(0) = 0$. En dérivant $\sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$ avec $|x| < 1$ (ou par la formule du binôme) on obtient $\sum_{n\geq 0} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$. Si $x > 0$, alors $0 < e^{-x} < 1$ et $S(x) = x^2\sum_{n\geq 0} ne^{-nx} = \frac{x^2e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}$. (On voit que $S(x)$ tend vers 1 lorsque $x \to 0$, ce qui donne une autre preuve que la série $\sum f_n(x)$ ne converge pas uniformément sur E.)

Corrigé de III (9=1,5+1,5+2+2+1+1)

1) On écrit : $(1+t^2)\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} = 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, et extrait les coefficients de t^n pour $n \geq 0$:

$$n(n-1)a_n + (n+2)(n+1)a_{n+2} = 2a_n \Longrightarrow (n+2)a_{n+2} = -(n-2)a_n.$$

2) En prenant $n=2$, on trouve $a_4 = 0$ donc aussi $a_{2p} = 0$ pour tout $p > 2$.

3) Les conditions $s(0) = 0$ et $s'(0) = 1$ impliquent $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$ donc aussi $a_2 = 0$. La valeur de a_{2p+1} pour $p \in \mathbb{N}$ se calcule par récurrence à partir de a_1 : $a_3 = 1/3$, $a_5 = -a_3/5 = -1/(3\times 5)$. Supposons qu'à l'ordre $2p-1$, pour $p \geq 2$ on ait : $a_{2p-1} = \frac{(-1)^p}{(2p-1)(2p-3)}$, alors on obtient :

$$a_{2p+1} = \frac{2p-3}{2p+1}\frac{(-1)^p}{(2p-1)(2p-3)} = \frac{(-1)^{p+1}}{(2p+1)(2p-1)}.$$

La formule est vérifiée à l'ordre $2p+1$ et donc la récurrence est bien vérifiée et on a :

$$s(t) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}t^{2p+1}}{(2p-1)(2p+1)}.$$

4) Comme $|a_n t^n| \leq \frac{1}{n(n-2)}$ pour $t \in [-1,1]$ et $n \geq 3$, et la série $\sum \frac{1}{n(n-2)}$ converge, la série $\sum a_n t^n$ est donc normalement convergente sur l'intervalle $[-1,1]$. On écrit $\sum a_n t^n = t\sum a_{2p+1}t^{2p}$. Le rayon de convergence de $\sum a_{2p+1}t^p$ est 1 puisque $\frac{|a_{2p+1}|}{|a_{2p-1}|} \to 1$ lorsque $p \to +\infty$. On en déduit que le rayon de convergence de $\sum a_n t^n$ est 1.

5) En dérivant terme à terme la série $\sum_{n\geq 0} a_n t^n$ on a $s'(t) = \sum_{p\geq 0} \frac{(-1)^{p+1}t^{2p}}{(2p-1)}$ pour $t \in [-1,1]$ et, pour $t \neq 0$,

$$g(t) = \frac{s'(t)-1}{t} = \sum_{p\geq 1} \frac{(-1)^{p+1}t^{2p-1}}{(2p-1)}.$$

D'où en dérivant terme à terme : $g'(t) = \sum_{p\geq 0}(-1)^p t^{2p} = \frac{1}{1+t^2}$. En intégrant, on trouve, avec la condition $g(0) = 0$, $g(t) = \arctan t$.

6) On en déduit que la fonction s peut s'écrire en intégrant par partie :

$$s(x) = \int_0^x t\arctan t dt + x = \frac{1}{2}x^2\arctan x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\arctan x.$$