Université Claude Bernard - Lyon 1 SP 2015-2016

Analyse IV - Math2029L Mardi 15 mars 2016

DS1

Durée: 1 heure 15 minutes

I (6=1+2+3)

1) Rappeler la définition de la convergence uniforme d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur une partie A de $\mathbb{R}$.
2) Rappeler la définition de la convergence uniforme (resp. la convergence normale) d'une série de fonctions $\sum f_n$ sur une partie A de $\mathbb{R}$.
3) Montrer que la série $\sum u_n$ tel que $u_n = (-1)^n \frac{\pi^2+n}{n^2}$ est convergente, mais n'est pas absolument convergente.

II (7=2+2+2+1)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \frac{ne^{-x}+x^2}{n+x}$.

a) Étudier la convergence simple de cette suite de fonctions.
b) Montrer qu'elle est uniformément convergente sur tout segment borné $[a,\ b]$.
c) Montrer qu'elle ne converge pas uniformément sur $[a,\ +\infty[$.
d) Calculer la limite lorsque $n \to +\infty$ de $I_n = \int_0^1 f_n(x)dx$.

III (8=4+4)

a) Étudier la nature de la série $\sum u_n$, où $u_n = \frac{(n!)^\alpha}{n^n}$, $\quad n \in \mathbb{N}^*, \quad \alpha \in \mathbb{R}$.
b) On considère la série $\sum u_n$, où

$$u_n = \ln\left[1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}\right], \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad \alpha > 0.$$

1. En intégrant l'équation $\frac{1}{1+t} = 1 - t + \frac{t^2}{1+t}$, montrer que, $\forall x \in]-1,1[$, $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \varepsilon(x)$, où $\varepsilon(x) = \int_0^x \frac{t^2}{1+t}dt$.
2. Montrer que

$$|\varepsilon(x)| \leq |x|^3, \qquad \forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

3. En déduire que la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 1/2$.

Corrigé de I (6=1+2+3)

1) Une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformémént sur $A \subset \mathbb{R}$ s'il existe une fonction $f(x)$ définie sur A telle que $\forall \epsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall x \in A$, $\forall n > n_0$ on ait $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit $S_n(x) = f_0(x) + \cdots + f_n(x)$ la somme partielle de la série de fonctions $\sum f_n(x)$. Si la suite $(S_n(x))$ converge uniformémént sur A, on dit que la série $\sum f_n(x)$ converge uniformément sur A. Soit $||f_n(x)||_\infty = \sup_{x\in A}\{|f_n(x)|\}$. Si $\sum ||f_n(x)||_\infty$ converge on dit que la série $\sum f_n(x)$ converge normalement sur A.

3) Il s'agit d'une série alternée. Comme $|u_n| = \frac{\pi^2+n}{n^2} \to 0$ $(n \to +\infty)$ en décroissant car, $\forall n \geq 1$,
$$|u_n| = \frac{\pi^2}{n^2} + \frac{1}{n} > \frac{\pi^2}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} = |u_{n+1}|,$$
la série $\sum u_n$ est donc une série alternée convergente, mais $|u_n| = \frac{\pi^2+n}{n^2} \sim \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n}$ diverge, donc $\sum u_n$ n'est pas absolument convergente.

Corrigé de II (7=2+2+2+1)

a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a
$$f_n(x) = \frac{ne^{-x} + x^2}{n+x} = \frac{e^{-x} + x^2/n}{1 + x/n} \underset{n\to\infty}{\to} e^{-x}.$$

b) Soit n_0 tel que $n_0 > -a$. Alors, $\forall n \geq n_0$ on a
$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - e^{-x}| = \sup_{x\in[a,b]} \frac{|x^2 - xe^{-x}|}{|n+x|} \leq \frac{M}{n+a} \underset{n\to\infty}{\to} 0,$$
où $M = \sup_{x\in[a,b]} |x^2 - xe^{-x}|$. Donc (f_n) converge uniformément sur $[a,\ b]$.

c) Pour $n \geq a$ on a $x_n = n \in [a,\ +\infty[$ et
$$\sup_{x\in[a,+\infty]} |f_n(x) - e^{-x}| \geq |f_n(n) - e^{-n}| = \frac{n - e^{-n}}{2}.$$
Or $\lim_{n\to\infty} \frac{n-e^{-n}}{2} = +\infty$. Donc (f_n) ne converge pas uniformément sur $[a, +\infty[$.

d) Comme (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$ on a
$$\lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_0^1 e^{-x}dx = 1 - e^{-1}.$$

Corrigé de III (8=4+4)

a) $u_n = \frac{(n!)^\alpha}{n^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$. On applique la règle de D'Alembert :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{((n+1)!)^\alpha}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{(n!)^\alpha} = (n+1)^{\alpha-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \underset{n\to+\infty}{\to} \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \alpha < 1, \\ e^{-1} & si \quad \alpha = 1, \\ +\infty & si \quad \alpha > 1. \end{cases}$$

En résumé, la série $\sum u_n$ converge ssi $\alpha \leq 1$.

b) 1. Pour tout $x \in]-1,1[$, on a

$$\int_0^x \frac{1}{1+t}dt = \int_0^x \left(1 - t + \frac{t^2}{1+t}\right)dt,$$

c'est-à-dire

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \varepsilon(x), \quad \text{où} \quad \varepsilon(x) = \int_0^x \frac{t^2}{1+t}dt.$$

2. Si $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, on a

$$|\varepsilon(x)| = \int_0^x \frac{t^2}{1+t}dt \leq \int_0^x t^2 dt = \frac{1}{3}x^3 \leq x^3;$$

si $x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$ et $t \in [x,0]$ on a $1+t \geq 1/2$ et

$$|\varepsilon(x)| = -\int_0^x \frac{t^2}{1+t}dt = \int_x^0 \frac{t^2}{1+t}dt \leq \int_x^0 2t^2 dt = -\frac{2}{3}x^3 \leq -x^3.$$

Donc $|\varepsilon(x)| \leq |x|^3$ pour tout $x \in [-1/2, 1/2]$.

3. De 2. on déduit que $\varepsilon(x)| = o(x^2)$ lorsque $x \to 0$. Donc, quand $n \to +\infty$ on a $u_n = \ln\left[1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}\right] = v_n - w_n$, où

$$v_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}, \quad w_n = \frac{1}{2n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right) \sim \frac{1}{2n^{2\alpha}}$$

Or $\sum v_n$ est convergente $\forall \alpha > 0$ et $\sum w_n$, étant une série à termes positifs pour n assez grand, converge ssi $\alpha > 1/2$. Donc $\sum u_n$ converge ssi $\alpha > 1/2$.

Attention

Soit $\sum u_n$ avec $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. On voit que la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est convergente, mais la série $\sum u_n$ est divergente car $u_n = v_n + w_n$, où $v_n = \frac{1}{n+1}$ et la série diverge, $w_n \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et la série $\sum w_n$ converge.