Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies
Spécialité : Mathématiques
UE : Analyse IV Printemps 2015

Contrôle Final Ecrit - Analyse IV
3 juin 2015

Avant propos.

La durée de l'examen est de 2h00. Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé. La répartition en durée de chacun des exercices n'est qu'à titre indicatif. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Questions de cours (30 minutes) (10 points)

1. **Filière non prépa :**
   (a) (4 points) Énoncer et démontrer le théorème d'Abel **pour les séries entières** .
   (b) (6 points) On considère une fonction f appartenant à l'ensemble
   $$\mathscr{F} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ 2\pi\text{-periodiques et dont le carré est intégrable sur } [-\pi, \pi]\}.$$
      i. Énoncer le théorème de Parseval-Bessel pour f en écriture complexe et réelle.
      ii. Démontrer l'inégalité de Bessel pour f.
2. **Filière prépa :**
   (a) (2 points) Énoncer le Lemme d'Abel pour les séries entières.
   (b) (4 points) Donner le développement en série entière au voisinage de 0 des fonctions suivantes, en précisant le rayon de convergence :
   $$x \longmapsto \cos(x) \quad \text{et} \quad x \longmapsto (1+x)^\alpha \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}.$$
   (c) (2 points) Énoncer avec précision le théorème de Parseval pour les séries de Fourier. On donnera l'égalité de Parseval-Bessel en formulation exponentielle et trigonométrique.
   (d) (2 points) Énoncer le théorème de dérivation par domination pour les intégrales à paramètres généralisées.

Exercice 1 (30 minutes) (10 points)

On considère la fonction 2π-périodique $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|(\pi - |x|)$, si $x \in]-\pi, \pi]$.

1. (2 points) Dessiner **soigneusement** la fonction sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$.

2. (2 points) La fonction f est-elle égale à la somme de sa série de Fourier ? Justifier.
3. (4 points) Déterminer la série de Fourier de f en formulation réelle.
   BONUS : (+2 points) déterminer la série de Fourier de f en formulation complexe.
4. (2 points) En déduire la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.
   BONUS : (+ 2 points) calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 2 (30 minutes) (10 points)

On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est définie par

$$f_n(x) = \frac{1}{1+n^2x^2}, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

1. (1 points) Étudier la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} f_n(0)$.
2. (2 points) Étudier la convergence simple de la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ sur $\mathbb{R}$, puis $\mathbb{R}^*$.
3. (2 points) Soit $a > 0$. Montrer que $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur tout intervalle de la forme $I_a =]-\infty, -a[\cup]a, +\infty[$.
4. (5 points) On considère la fonction S définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2x^2}$.
   (a) (1 point) Déterminer la limite (si elle existe) $\lim_{x\to+\infty} S(x)$.
   Indication : on pourra commencer par chercher une majoration de $\frac{1}{1+n^2x^2}$ en fonction de x^2 et n^2, ou utiliser le théorème d'échange limite/série.
   (b) (4 points) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note S_n la somme partielle d'ordre n de la série $\sum_{k\geq 1} f_k$.
      i. Déterminer la limite $\lim_{n\to+\infty} S_n(0)$.
      ii. Comparer $S(x)$ et $S_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
      iii. Montrer que la fonction S est décroissante. En déduire l'existence de $l = \lim_{x\to 0^+} S(x) \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.
      iv. En justifiant la continuité en 0 de la fonction S_n (pour tout $n \in \mathbb{N}^*$), déduire des trois questions précédentes la valeur de l.
   (c) Bonus : (+2 points) À l'aide d'une comparaison série-intégrale, montrer que
   $$\lim_{x\to 0^+} xS(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 3 (30 minutes) (10 points)

On suppose $f : [\alpha, \beta] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue (où $[\alpha, \beta]$ et $[a, b]$ sont des segments fermés bornés de $\mathbb{R}$).
On considère les fonctions suivantes :

$$f_1 : \begin{array}{ccc} [\alpha,\beta] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_a^b f(x,t)dt, \end{array} \qquad \text{et} \quad f_2 : \begin{array}{ccc} [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \displaystyle\int_\alpha^\beta f(x,t)dx, \end{array}$$

1. (2 points) Justifier (en énonçant un théorème du cours) que les fonctions f_1 et f_2 sont continues.
2. (8 points) On pose maintenant

$$\varphi : \begin{array}{ccc} [\alpha,\beta]\times[a,b] & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \displaystyle\int_a^y f(x,t)dt, \end{array} \qquad \text{et} \quad G : \begin{array}{ccc} [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \displaystyle\int_\alpha^\beta \varphi(x,y)dx, \end{array}$$

   (a) (1 point) Pour tout $x \in [\alpha, \beta]$, calculer $\varphi(x, a)$ et $G(a)$.

   (b) (1 point) Justifier que φ admet une dérivée partielle par rapport à y que l'on notera $\dfrac{\partial}{\partial y}\varphi$. Donner son expression en fonction de f et montrer qu'elle est continue sur $[\alpha, \beta]\times[a, b]$.

   (c) (1 point) Enoncer le théorème de dérivabilité pour les intégrales dépendant d'un paramètre définies sur un segment .

   (d) (2 points) En déduire que G est dérivable sur $[a, b]$ et calculer sa dérivée G'.

   (e) (1 point) Montrer que $G(b) = \displaystyle\int_a^b G'(y)dy$ et l'exprimer en fonction de f.

   (f) (1 point) D'après la définition de G, donner une autre expression de $G(b)$ toujours en fonction de f.

   (g) (1 point) En utilisant les deux questions précédentes en déduire un théorème du cours.