L1 PCSI – UE TMB -
Techniques Mathématiques de Base

February 22, 2016

Programme du cours

Chapter 1

Nombres Complexes

1.1 Premières définitions

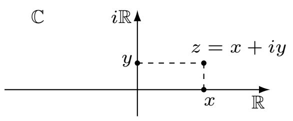
Définition: Un **nombre complexe** est un nombre de la forme $\boxed{z = x + iy}$, où x et y sont des nombres réels et i est un symbol ayant la propriété $\boxed{i^2 = -1}$, qui s'appelle **unité imaginaire**.

Attention: i n'est pas un nombre réel.

Exemples:

- On note $\boxed{\mathbb{C} = \{z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}}$ l'**ensemble des nombres complexes**. Il contient deux sous-ensembles:
  - les nombres réels: $\boxed{\mathbb{R} = \{x = x + i0 \mid x \in \mathbb{R}\}}$;
  - les nombres **imaginaires purs**: $\boxed{i\mathbb{R} = \{iy = 0 + iy \mid y \in \mathbb{R}\}}$.

L'ensemble $\mathbb{C}$ se represente comme le **plan** $\mathbb{R}^2$:



Définition: Pour un nombre complexe $z = x + iy$, on appelle:

- **partie réelle** le nombre réel $\boxed{\mathrm{Re}(z) = x}$
- **partie imaginaire** le nombre réel $\boxed{\mathrm{Im}(z) = y}$
- **conjugué complexe** le nombre complexe $\boxed{\overline{z} = x - iy}$

Exemples

Proprietés: Soyent z et w deux nombres complexes. Alors:

- $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
- $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$

- $\mathrm{Re}(z) = (z + \overline{z})/2$ et $\mathrm{Im}(z) = (z - \overline{z})/2i$
- $\boxed{\overline{z} = z \;\Leftrightarrow\; z \in \mathbb{R}}$ et $\boxed{\overline{z} = -z \;\Leftrightarrow\; z \in i\mathbb{R}}$

1.2 Opérations

Définition: Soient $z = x + iy$ et $w = u + iv$ deux nombres complexes et $\lambda \in \mathbb{R}$.

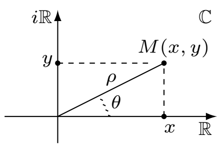
- **egalité**: $z = w$ si et seulment si $x = u$ et $y = v$
- **addition:** $z + w = (x + u) + i(y + v)$
- **soustraction:** $z - w = (x - u) + i(y - v)$
- **produit par scalaire:** $\lambda\, z = (\lambda\, x) + i(\lambda\, y)$
- **multiplication:** $\begin{aligned} z\, w &= xu + iyu + ixv + i^2yv \\ &= (xu - yv) + i(xv + yu) \end{aligned}$
- **division:** $\dfrac{z}{w} = \dfrac{z\,\overline{w}}{w\,\overline{w}} = \dfrac{(x+iy)(u-iv)}{(u+iv)(u-iv)} = \dfrac{xu+yv}{u^2+v^2} + i\,\dfrac{yu-xu}{u^2+v^2}$

  Exemples:

1.3 Module et argument

Définition: On identifie le plan complexe $\mathbb{C}$ avec le plan $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère cartésien $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On appelle alors:

- **affixe complexe** d'un point $M(x,y)$ le nombre complexe $z = x + iy$
- **module** de z la distance $|z| = \mathrm{dist}(M,O) = \rho$
- **argument** de z l'angle $\theta \in [0, 2\pi[$ comme dans la figure:



Proprietés: On a alors:

- $\boxed{|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \rho}$
- $\boxed{\mathrm{Re}(z) = x = \rho\cos\theta}$ et $\boxed{\mathrm{Im}(z) = y = \rho\sin\theta}$
- $\boxed{\cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}$ et $\boxed{\sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}$
- $\boxed{\tan\theta = \dfrac{y}{x}}$ si $x \neq 0$

Exemples

Proprietés du module:

- $\boxed{|z| \geq 0}$ et $\boxed{|z| = 0 \text{ si et seulement si } z = 0}$

- si $z \in \mathbb{R}$, alors $|z|$ est la valeur absolue du réel z

- $|-z| = |z|$;

- $\boxed{z\overline{z} = |z|^2}$ par conséquent $\boxed{\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}}$ si $z \neq 0$

- $\boxed{|z_1 z_2| = |z_1||z_2|}$ et $\boxed{\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}}$ si $z \neq 0$

- $\boxed{|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|}$

  et $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ si et seulement si $z_1 = \lambda\, z_2$ ou $\lambda \in \mathbb{R}$

- $|z_1+z_2| \geq ||z_1|-|z_2||$, i.e. $\begin{cases} |z_1+z_2| \geq |z_1|-|z_2| \text{ si } |z_1| \geq |z_2|, \\ |z_1+z_2| \geq |z_2|-|z_1| \text{ si } |z_1| \leq |z_2|. \end{cases}$

1.4 Représentation Polaire

Définition: L'**exponentiel complexe d'argument** θ est le nombre complexe $\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$.

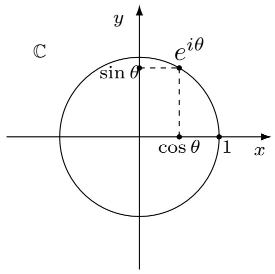
Exemples:

Proprietés:

- $e^{i\theta}$ est **périodique** de **période** 2π, $\boxed{e^{i(\theta+2\pi)} = e^{i\theta}}$

- $e^{i\theta}$ est un nombre complexe **unitaire**, i.e. $\boxed{|e^{i\theta}| = 1}$

- le point $M(e^{i\theta})$ se trouve sur le **cercle unitaire** $x^2 + y^2 = 1$



<u>Théorème:</u> Tout nombre complexe $z \neq 0$ s'ecrit sous la **forme polaire** $\boxed{z = \rho\ e^{i\theta}}$, où $\rho = |z|$.

En effet: $z = x + iy = \rho\cos\theta + i\rho\sin\theta = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho\ e^{i\theta}$.

<u>Proprietés:</u> Soient $z = \rho e^{i\theta}$ et $w = re^{i\varphi}$ deux nombres complexes en forme polaire. On a alors:

- **produit**: $z\,w = (\rho\,r)\ e^{i(\theta+\varphi)}$,
- **puissance entière positive**: $z^n = \rho^n e^{in\theta}$, où $n \in \mathbb{N}$
- **puissance entière negative**: $z^{-n} = \dfrac{1}{z^n} = \dfrac{1}{\rho^n} e^{-in\theta}$ si $\rho \neq 0$,
- **Formule de Moivre**: $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$, où $n \in \mathbb{N}$

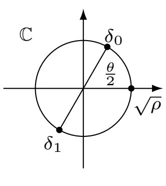
<u>Exemples</u>

1.5 Racines carrées et cubiques d'un nombre complexe

- Les **racines carrées** de $z = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C}$ sont toujours <u>deux</u>, δ_0 et δ_1:

$$\delta_k = \sqrt{\rho}\ e^{i\left(\frac{\theta}{2}+k\pi\right)}, \quad k = 0, 1$$

c-à-d $\boxed{\delta_0 = \sqrt{\rho}\ e^{i\frac{\theta}{2}}}$ et $\boxed{\delta_1 = \sqrt{\rho}\ e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)}}$



Proprieté: On a $\delta_1 = -\delta_0$.

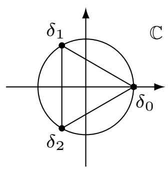
- Les **racines cubiques** de $z = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C}$ sont toujours <u>trois</u>:

$$\delta_k = \sqrt[3]{\rho}\ e^{i\left(\frac{\theta}{3}+k\frac{2\pi}{3}\right)}, \quad k = 0, 1, 2$$

Proprieté: Si une racine cubique est réelle, les autres deux sont conjugués complexes.

Exemple: Si $\theta = 0$ et $\delta_0 = \sqrt[3]{\rho}$, on a

$\delta_1 = \sqrt[3]{\rho}\ e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $\delta_2 = \sqrt[3]{\rho}\ e^{i\frac{4\pi}{3}} = \overline{\delta_1}$



Exemples

1.6 Polynômes complexes

Définition: Un **polynôme complexe** est un polynôme $P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ avec coefficients complexes, $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{C}$. (Peu importe X, c'est une variable.)

- Le **degré** de $P(X)$ est le plus grand entier n tel que $a_n \neq 0$.

  Exemples :

- Une **factorisation** d'un polynôme $P(X)$ est l'ecriture

  $$P(X) = Q_1(X)\, Q_2(X) \cdots Q_l(X)$$

  comme produit de polynômes de degré inférieur à celui de $P(X)$.

  Exemples :

- Un polynôme $P(X)$ est **irreductible** [dans $\mathbb{C}$ resp. $\mathbb{R}$] s'il ne se factorise pas [dans $\mathbb{C}$ resp. $\mathbb{R}$].

  Exemples:

Définition: Une **racine** d'un polynôme complexe $P(X)$ est un nombre complexe z tel que $P(z) = 0$.

Exemple:

Lemme: Si z est une racine de $P(X)$ alors on peut factoriser $P(X)$ par $(X - z)$.

Théorème de d'Alembert-Gauss: Tout polynôme complexe $P(X)$ de degré d se factorise comme

$$P(X) = z_0 (X - z_1)^{m_1} \cdots (X - z_l)^{m_l}$$

où $z_0 \in \mathbb{C}$, $z_1, ..., z_l$ sont les racines de $P(X)$ et $m_1 + \cdots + m_l = d$.

Par conséquent:

- Tout polynôme complexe de degré d admet d racines.
- Seuls les polynômes complexes $a_1 X + a_0$ sont irreductibles.

1.6.1 Racines d'un polynôme complexe de degré 2

Proposition: Les solutions de l'équation $\boxed{az^2 + bz + c = 0}$, à coefficients complexes, sont

$$\boxed{z = \frac{-b \pm \delta}{2a} \in \mathbb{C}}$$

où $\delta \in \mathbb{C}$ est une racine carrée du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$, c'est-à-dire un nombre complexe tel que $\delta^2 = \Delta$.

Par conséquent: Le polynôme $P(X) = aX^2 + bX + c$ a

- <u>une racine double</u> $z = -b/2a$ si $\Delta = 0$,
- <u>deux racines distinctes</u> $z_1 = \dfrac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$ si $\Delta \neq 0$.

<u>**Exemples**</u>

1.6.2 Racines complexes d'un polynôme réel

Proposition: Si $P(X)$ est un polynôme à coefficients réels, et $z \in \mathbb{C}$ est une racine complexe de $P(X)$ alors son conjugué $\overline{z}$ est aussi une racine de $P(X)$,

Par conséquent:

- Puisque $z = \overline{z}$ seulement si $z \in \mathbb{R}$, tout polynôme réel <u>de degré impair $d \geq 3$</u> admet <u>au moins une racine réelle</u>.
- <u>Les polynômes réels irreductibles sont de degré 1 ou 2</u>, c'est-à-dire qu'ils sont de la forme $a_1X + a_0$ ou bien $a_2X^2 + a_1X + a_0$.
- Tout polynôme réel <u>irréductible de degré 2</u> admet <u>deux racines complexes conjuguées</u>, z et $\overline{z}$.

<u>**Exemple:**</u>

Chapter 2

Algèbre linéaire

2.1 Matrices

2.1.1 Définition

Une **matrice** $m \times n$ à coéfficients réels est un tableau avec m lignes et n colonnes

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

où les entrées a_{ij} sont des nombres réels pour $i = 1, ..., m$ et $j = 1, ..., n$.

Exemples:

- Une **matrice carrée** est une matrice $n \times n$.

- Une **matrice colonne** est une matrice $n \times 1$,
  c'est-à-dire un vecteur à n composantes.

- Une **matrice ligne** est une matrice $1 \times n$.

2.1.2 Opération sur les matrices

Proposition: L'ensemble $\mathcal{M}_{mn}$ des matrices $m \times n$ à coefficients réels est muni des opérations suivantes

- **addition**:

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

- **produit par un scalaire**: $t\,(a_{ij}) = (t\,a_{ij}) = \begin{pmatrix} t\,a_{11} & \cdots & t\,a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ t\,a_{m1} & \cdots & t\,a_{mn} \end{pmatrix}$.

Exemples:

2.1.3 Produit de matrices

Définition: Le **produit** des matrices $\big(a_{ij}\big) \in \mathcal{M}_{mn}$ et $\big(b_{jk}\big) \in \mathcal{M}_{np}$ est la matrice $\big(c_{ik}\big) \in \mathcal{M}_{mp}$ avec coefficients

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ b_{jk} \quad \textbf{règle “lignes } \times \textbf{ colonnes”}.$$

Le produit est donc une opération $\quad \mathcal{M}_{mn} \times \mathcal{M}_{np} \to \mathcal{M}_{mp}$.

Exemples

2.1.4 Matrices inversibles

Définition: Considerons un espace $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ de matrices carrées.

- La matrice $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ s'appelle **unité** car, pour toute A, on a

$$\boxed{AI_n = I_n = A}.$$

- La matrice A a une **inverse** s'il existe une matrice notée A^{-1} telle que

$$\boxed{AA^{-1} = A^{-1}A = I_n}.$$

- Une matrice A est **inversible** si la matrice inverse A^{-1} existe.

Remarque: La matrice inverse n'existe pas toujours. En particulier, A^{-1} n'existe pas si A n'est pas carrée, car dans ce cas on ne peut pas calculer l'un des deux produits AA^{-1} ou $A^{-1}A$.

Exemples:

2.1.5 Détérminant des matrices 2x2 et 3x3

Le **détérminant** d'une matrice carrée dans $\mathcal{M}_{22}$ ou $\mathcal{M}_{33}$ est le nombre réel, noté $\det A$ défini pour par:

$$\boxed{\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc}$$

$$\boxed{\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}$$

Exemples:

Proprietés: Si A est une matrice $n \times n$, on a:

- $\boxed{\det(t\,A) = t^n \det(A)}$.
- $\boxed{\det(AB) = \det(A)\det(B)}$
- $\boxed{\det(A^{-1}) = 1/\det(A)}$.

2.2 Systèmes linéaires et matrices

Définition: Un **système d'équations linéaires** en n variables $(x_1, ..., x_n)$ est un système de la forme

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1n}\,x_n = b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots + a_{2n}\,x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + \cdots + a_{nn}\,x_n = b_n \end{cases}$$

Un tel système peut avoir une solution, plusieurs solutions ou aucune solution, selon la dépendance mutuelle des équations.

Exemples:

Pour résoudre un tel système (surtout si $n \geq 3$), on peut utiliser la **méthode de Gauss**. Cette méthode consiste à effectuer des opèrations dites **élémentaires** sur les lignes pour se ramener à un système plus simple à résoudre.

Proposition:

- En posant

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

  le système précédent est équivalent à l'équation matricielle

$$\boxed{AX = B}.$$

- Cette équation admet une solution unique si et seulement si $\boxed{\det(A) \neq 0}$, et dans ce cas la solution est donnée par le produit de matrices

$$\boxed{X = A^{-1}B}.$$

Méthode de Gauss: Les opérations élémentaires sur les lignes sont

- multiplier une ligne par un scalaire
- ajouter à une ligne une autre ligne multipliée par un scalaire

Exemple

Calcul de la matrice inverse d'une matrice 2×2

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ est inversible} \quad \Leftrightarrow \quad \det A = ad - bc \neq 0}.$$

Dans ce cas, sa matrice inverse est $\boxed{A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$.

Exemples:

Calcul de l'inverse d'une matrice 3×3:

Nous savons que la matrice A est inversible si et seulement si pour toute matrice Y dans $\mathcal{M}_{31}$, le système $AX = Y$ a une seule solution. De plus A^{-1} est la matrice du système $A^{-1}Y = X$. Pour déterminer si A est inversible et calculer son inverse on résout donc le système $AX = Y$, où Y est une matrice dont tous les coefficients sont des lettres.

Exemple

2.3 Les espaces vectoriels $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

La droite vectorielle $\mathbb{R}$, le plan vectoriel $\mathbb{R}^2$ et l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ sont donnés respectivement par un ensemble d'éléments appelés vecteurs munis de deux opérations : la somme et le produit par scalaire.

Définition :

1. la droite vectorielle $\mathbb{R}$ est l'ensemble des réels avec la somme et le produit usuels

2. le plan vectoriel $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble $\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\right\}$

   - pour tout $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ la somme est donnée par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+t \\ y+s \end{pmatrix}$$

- pour tout $\begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ et $k \in \mathbb{R}$ la multiplication par un scalaire par

$$k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$$

.

3. l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est l'ensemble $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R} \right\}$

- pour tout $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} t \\ s \\ r \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ la somme est donnée par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ s \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+t \\ y+s \end{pmatrix} z+r$$

- pour tout $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ et $k \in \mathbb{R}$ la multiplication par un scalaire par

$$k \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix} kz$$

On notera les vecteurs par des symboles de la forme $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$,...
Exemples

2.3.1 Bases de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

Définition: Une **base** de $\mathbb{R}^2$ est un ensemble de deux vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ qui ne sont pas colinéaires. Cette condition est équivalente à $\boxed{ac - bd \neq 0}$.

Exemples

Définition: Une **base** de $\mathbb{R}^3$ est un ensemble de trois vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} g \\ h \\ l \end{pmatrix}$ qui n'appartiennent pas au même plan. Cette condition est équivalente à $\boxed{a(el - fh) - b(dl - fg) + c(dh - eg) \neq 0}$.

Exemples

Théorème

1. Tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ s'écrit de façon unique comme une **combinaison linéaire** des vecteurs de la base, c'est à dire si $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ est une base et $\vec{m}$ un vecteur quelconque, alors il existe des scalaires x et y tels que $\vec{m} = x\vec{u} + y\vec{v}$.
2. Tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ s'écrit de façon unique comme une **combinaison linéaire** des vecteurs de la base, c'est à dire si $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ est une base et $\vec{m}$ un vecteur quelconque, alors il existe des scalaires x, y et z tels que $\vec{m} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$.

   Exemples

Définitions : Le **produit scalaire** entre deux vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{u}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ ou entre $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ est défini par :

- $\vec{u} \cdot \vec{u}' = xx' + yy'$ dans $\mathbb{R}^2$ et
- $\vec{v} \cdot \vec{v}' = xx' + yy' + zz'$ dans $\mathbb{R}^3$

  Exemples

Définition : La **norme** d'un vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ ou $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ est défini par :

- $\| \vec{u} \| = \sqrt{x^2 + y^2}$ dans $\mathbb{R}^2$ et
- $\| \vec{v} \| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^3}$ dans $\mathbb{R}^3$

  Exemples

Définition : Deux vecteurs $\vec{v}, \vec{v}'$ de $\mathbb{R}^2$ sont

- **orthogonaux** si: $\boxed{\vec{v} \perp \vec{v}' \;\Leftrightarrow\; xx' + yy' = 0}$ c'est à dire $\boxed{\vec{v} \cdot \vec{v}' = 0}$
- **colinéaires** si: $\boxed{\vec{v} = t\vec{v}' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = tx \\ y' = ty \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x'}{x} = \frac{y'}{y}}$,

Définition : Deux vecteurs $\vec{v}, \vec{v}'$ de $\mathbb{R}^3$ sont

- **orthogonaux**: $\boxed{\vec{v} \perp \vec{v}' \quad \Leftrightarrow \quad xx' + yy' + zz' = 0}$
- **colinéaires**: $\boxed{\vec{v}' = t\vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x' = tx \\ y' = ty \\ z' = tz \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'}}$

  alternative: $\boxed{\vec{v} \wedge \vec{v}' = \vec{0} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} xy' = yx' \\ yz' = zy' \\ xz' = zx' \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'}}$

2.4 Applications linéaires

2.4.1 Définition

Soient U et V les espaces vectoriels $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

Définition: Une **application linéaire de** U **dans** V est une application

$$L : U \longrightarrow V, \;\; \vec{u} \mapsto L(\vec{u})$$

telle que pour tout $\vec{u}, \vec{v}$ dans U et tout scalaire t dans $\mathbb{R}$

- $\boxed{L(\vec{u} + \vec{v}) = L(\vec{u}) + L(\vec{v})}$
- $\boxed{L(t\ \vec{v}) = t\ L(\vec{v})}$

Exemples d'applications linéaires:

Exemples d'applications NON linéaires:

Rotations, réflexions et projections orthogonale de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$

- **Rotation** d'angle θ: $\boxed{\mathrm{Rot}_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\ x - \sin\theta\ y \\ \sin\theta\ x + \cos\theta\ y \end{pmatrix}}$

- **Réflexion (ou symétrie orthogonale)** par rapport à une droite qui forme un angle θ avec Ox:

$$\boxed{\mathrm{Ref}_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\theta)\ x + \sin(2\theta)\ y \\ \sin(2\theta)\ x - \cos(2\theta)\ y \end{pmatrix}}$$

- **Projections orthogonales** sur $\mathbb{R}\vec{\imath}$ et $\mathbb{R}\vec{\jmath}$: $\boxed{P_{\vec{\imath}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}}$ $\boxed{P_{\vec{\imath}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}}$

- **Projection orthogonale dans $\mathbb{R}^2$ de $\tilde{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sur $\tilde{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$** :

$$\boxed{\mathrm{Pr}_{\vec{v}}(\vec{u}) = \frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\|\ \vec{v}\ \|}\vec{v} = \frac{x'x + y'y}{x^2+y^2}\ \vec{v}}$$

- **Projection orthogonale dans $\mathbb{R}^3$ de $\tilde{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ sur $\tilde{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$** : $\boxed{\mathrm{Pr}_{\vec{v}}(\vec{u}) = \frac{x'x + y'y + z'z}{x^2+y^2+z^2}\ \vec{v}}$

ex. $\mathrm{Pr}_{5\vec{\jmath}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1\times 0 + 2\times 5 + 3\times 0}{0^2+5^2+0^2}\ 5\ \vec{\jmath} = 2\ \vec{\jmath} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

2.4.2 Inverse d'une application linéaire

Dans cette section les lettres $U, V, V', W, \ldots$ désignent $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

Définition: La **composée** de deux applications linéaires $L : U \to V$ et $L' : V \to W$ est l'application $L' \circ L : U \longrightarrow W$ définie par

$$\boxed{(L' \circ L)(\vec{u}) = L'\Big(L(\vec{u})\Big)}.$$

Exemple:

Définition: L'**inverse**, ou **réciproque**, de l'application linéaire $L : U \to V$ est l'application $L^{-1} : V \to U$ telle que

$$\boxed{(L^{-1} \circ L)(\vec{u}) = \vec{u}} \quad \text{et} \quad \boxed{(L \circ L^{-1})(\vec{v}) = \vec{v}},$$

pour tout $\vec{u} \in U$ et pour tout $\vec{v} \in V$. Autrement dit, si:

$$\boxed{L(\vec{u}) = \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u} = L^{-1}(\vec{v})}$$

Exemples:

Définition: Une application linéaire est bijective si elle a une inverse. On dit aussi qu'elle est un **isomorphisme**.

2.4.3 Applications linéaires et matrices

Dans toute la suite n et m sont des entiers parmi 1,2 et 3.

Des matrices aux applications linéaires

À toute matrice $A = \big(a_{ij}\big)$ de taille $m \times n$, on peut lui associer l'application $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ définie par

$$\boxed{L(\vec{x}) = A\ \vec{x}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

L'application L est une application linéaire.

Exemples :

Des applications linéaires aux matrices

Exemple

Théorème: Soit $L : U \to V$ et $L' : V \to W$ deux applications linéaires et A et A' leurs matrices respectives

1. La matrice de l'application $L' \circ L$ est la matrice $A'A$.

2. L est inversible si et seulement si A est inversible. Si c'est bien le cas, la matrice de l'application linéaire L^{-1} est A^{-1}.

Exemples:

2.4.4 Isométries

Définition: Un isomorphisme $L : V \to V'$ est une **isométrie** s'il conserve les produits scalaires:

$$\boxed{L(\vec{u}) \cdot L(\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}}.$$

Cette propriété est équivalente à demander que l'isomorphisme L préserve la norme

$$\boxed{\| L(\vec{u}) \| = \| \vec{u} \|}.$$

Exemples

Les matrices des isométries ont des propriétés très particulières, ce sont des **matrices orthogonales**.

Définition: La **transposée** d'une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ est la matrice $A^t = (a_{ji}) \in \mathcal{M}_{nm}(\mathbb{R})$.

Exemples:

Proprieté: Si A est une matrice carrée, on a $\boxed{\det(A^T) = \det(A)}$.

Définition: Une matrice carrée inversible A est **orthogonale** si $\boxed{A^{-1} = A^T}$.

Exemples:

Proprietés: Si A est orthogonale, on a $\boxed{\det(A) = \pm 1}$.

On distingue les

- **isométries directes**, données par des matrices orthogonales A avec $\boxed{\det(A) = +1}$, qui preservent l'orientation des angles (rotations),
- **isométries inverses**, données par des matrices orthogonales A avec $\boxed{\det(A) = -1}$, qui inversent l'orientation des angles (reflexions).

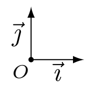
Chapter 3

4 Géométrie

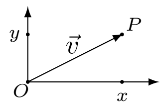
3.1 Géométrie cartésienne dans le plan

3.1.1 Coordonnées cartésiennes et polaires

On fixe un **repère cartesien** $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, où O est un point et $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est une **base orthonormale directe (o.n.d.)** de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, i.e. telle que $\vec{\imath} \perp \vec{\jmath}$ et $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 1$. On a alors:



- Tout **vecteur** $\vec{v}$ **appliqué en** O s'écrit comme $\boxed{\vec{v} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}}$: les scalaires $x, y \in \mathbb{R}$ s'appellent **coordonnées cartesiennes** de $\vec{v}$ et représentent les **projections orthogonales** de $\vec{v}$ dans les direction $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$. On note: $\boxed{\vec{v} = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)}$.



- On appelle **coordonnées cartesiennes** d'un **point** P le couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ de coordonnées du vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$, et on écrit $\boxed{P(x, y)}$.

- On appelle **coordonnées polaires** d'un **point** P le couple (r, θ) où

  $r = \| \vec{OP} \| = \sqrt{x^2 + y^2}$ et

  θ est l'angle $(\widehat{\vec{\imath}, \vec{OP}})$.

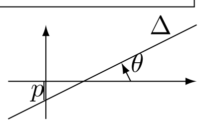
  On a donc $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$.

  Exemples

3.1.2 Droites

- **Équation d'une droite** : $\boxed{\Delta = \Big\{ P(x, y) \mid ax + by + c = 0 \Big\}}$ $(a, b) \neq (0, 0)$.

  Si $b \neq 0$ alors $\boxed{y = -\dfrac{a}{b}\,x - \dfrac{c}{b} = m\,x + p}$ où $\boxed{m = \tan\theta}$



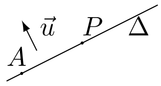
  Si $a \neq 0$ alors $\boxed{x = -\dfrac{b}{a}\,y - \dfrac{c}{a}}$.

- **Vecteur orthogonal** ou **normal** à Δ $\quad \vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

- **Vecteur directeur** de Δ $\quad = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ (ou tout autre vecteur colinéaire a celui-ci)

<u>**Droites particulières**</u>

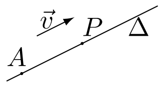
- **Droite passant par** $A = (a_1, a_2)$ **et de vecteur directeur orthogonal à** $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$:



  condition: $\quad \overrightarrow{AP} \cdot \vec{u} = 0$

  équation: $\boxed{(x - a_1)u_1 + (y - a_2)u_2 = 0}$

- **Droite passant par** $A = (a_1, a_2)$ **et de vecteur directeur colinéaire à** $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$:

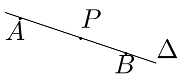


  condition: $\quad \overrightarrow{AP} \parallel \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\vec{v}, \ t \in \mathbb{R}$

  éq. paramétrique: $\boxed{\begin{cases} x = a_1 + tv_1 \\ y = a_2 + tv_2 \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}}$

  éq. cartesienne: $\boxed{\dfrac{x - a_1}{v_1} = \dfrac{y - a_2}{v_2}}$

- **Droite passant par** $A = (a_1, a_2)$ **et** $B = (b_1, b_2)$:

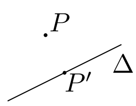


  condition: $\quad \overrightarrow{AP}$ colinéaire à $\overrightarrow{AB}$

  équation: $\boxed{\dfrac{x - a_1}{b_1 - a_1} = \dfrac{y - a_2}{b_2 - a_2}}$

  <u>**Exemples:**</u>

3.1.3 Distance, Aire



<u>**Distance**</u>:

- **d'un point** $P(x, y)$ **à un point** $P'(x', y')$:

$$\boxed{\text{dist}(P, P') = \|\overrightarrow{PP'}\| = \|\overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OP}\| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}}$$

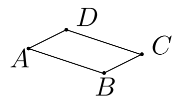
- **d'un point** $P(x, y)$ **à une droite** Δ **d'éq.** $ax + by + c = 0$: on appelle P' la projection orthogonale de P sur la droite Δ, alors

$$\boxed{\text{dist}(P, \Delta) = \text{dist}(P, P') = \frac{|\ ax + by + c\ |}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

Exemples

Aire

d'un parallelogramme de sommets $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$, $D(x_D, y_D)$:



$$\text{Aire} = |\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}^{\perp}| = \|\ \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\|.$$

Puisque $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} x_D - x_A \\ y_D - y_A \end{pmatrix}$, on a $\overrightarrow{AD}^{\perp} = \begin{pmatrix} y_D - y_A \\ -(x_D - x_A) \end{pmatrix}$, donc

$$\boxed{\text{Aire} = |\ (x_B - x_A)(y_D - y_A) - (y_B - y_A)(x_D - x_A)|}$$

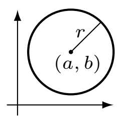
Exemples

3.1.4 Coniques

$$\boxed{\mathcal{C} = \Big\{(x, y) \mid ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0\Big\}} \quad (a, b, c) \neq (0, 0, 0).$$

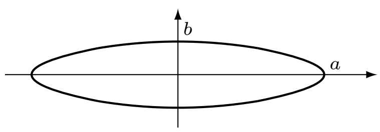
- **Cercle**: $\boxed{(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2}$

  centre (a, b), rayon r



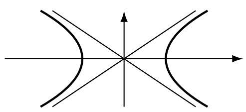
- **Ellipse**: $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1}$

  centre $(0, 0)$, axes $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.



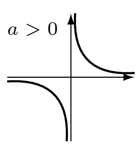
- **Hyperbole**: $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1}$

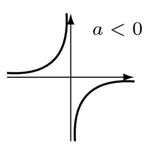
  centre $(0, 0)$, axes $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$,
  asymptotes $y = \pm\dfrac{b}{a}x$



  ou bien: $\boxed{y = \dfrac{a}{x}}$

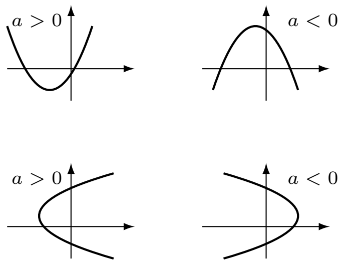
  centre $(0, 0)$, asymptotes $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$





- **Parabole**:
  $\boxed{y = ax^2 + bx + c}$
  axe parallèle à $\vec{\jmath}$

  ou bien: $\boxed{x = ay^2 + by + c}$
  axe parallèle à $\vec{\imath}$

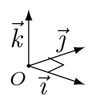


Exemples

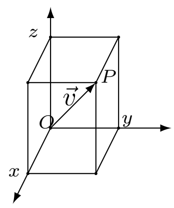
3.2 Géométrie dans l'espace:

3.2.1 Coordonnées cartesiennes, cylindriques et sphériques

On fixe un **repère cartesien** $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, où O est un point et $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est une **base orthonormale directe (o.n.d.)** de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. On a alors:



- Tout **vecteur** $\vec{v}$ **appliqué en** O s'écrit comme $\boxed{\vec{v} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}}$: les scalaires $x, y, z \in \mathbb{R}$ s'appellent **coordonnées cartesiennes** de $\vec{v}$ et représentent les **projections orthogonales** de $\vec{v}$ dans les direction $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$. On note: $\boxed{\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}$.



- On appelle **coordonnées cartesiennes** d'un **point** P le triplet $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ de coordonnées du vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$, et on écrit $\boxed{P(x, y, z)}$.

- On appelle **coordonnées cylindriques** d'un **point** P le triplet (ρ, θ, z) où
  - $\rho = \| \vec{Om} \|$
  - θ est l'angle $(\widehat{\vec{i}, \vec{Om}})$
  - $z = z$

  On a donc $\boxed{\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \\ z = z \end{cases}}$

- On appelle **coordonnées sphériques** d'un **point** P le triplet (ρ, θ, ϕ) où
  - $\rho = \| \vec{OP} \|$
  - θ est l'angle $(\widehat{\vec{i}, \vec{Om}})$

– ϕ est l'angle $(\widehat{\vec{Om},\vec{OP}})$

Dans ce cas on a donc $\boxed{\begin{cases} x = \rho\cos\theta\cos\phi \\ y = \rho\sin\theta\cos\phi \\ z = \rho\sin\phi \end{cases}}$

Exemples

3.2.2 Produit vectoriel, produit mixte

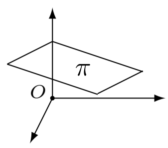
Si $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{v}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, $\vec{v}'' = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$ et $t \in \mathbb{R}$, alors

- **produit vectoriel**: $\boxed{\vec{v} \wedge \vec{v}' = \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ -xz' + zx' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}}$
- **produit mixte**: $\boxed{[\vec{v}, \vec{v}', \vec{v}'''] = x(y'z'' - z'y'') - y(x'z'' - z'x'') + z(x'y'' - y'x'')}$

Exemples

3.2.3 Plans dans l'espace

$\boxed{\pi = \Big\{ P(x, y, z) \mid ax + by + cz + d = 0 \Big\}}$



$(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$

- **Vecteur orthogonal** ou **normal** à π : $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Plans particuliers

- **Plan passant par** $A = (a_1, a_2, a_3)$ **et orthogonal à** $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$:

condition: $\overrightarrow{AP} \cdot \vec{u} = 0$

équation: $\boxed{u_1(x - a_1) + u_2(y - a_2) + u_3(z - a_3) = 0}$

- **Plan passant par** $A = (a_1, a_2, a_3)$ **parallèle à** $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ **et** $\vec{v}' = \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \end{pmatrix}$:

  condition: $[\overrightarrow{AP}, \vec{v}, \vec{v}'] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AP} = t\vec{v} + t'\vec{v}'$

  équation paramétrique: $\boxed{\begin{cases} x - a_1 = tv_1 + t'v_1' \\ y - a_2 = tv_2 + t'v_2' \\ z - a_3 = tv_3 + t'v_3' \end{cases}}$

  équation cartesienne: $\boxed{(x - a_1)(v_2v_3' - v_3v_2') - (y - a_2)(v_1v_3' - v_3v_1') + (z - a_3)(v_1v_2' - v_2v_1') = 0}$

- **Plan passant par** $A = (a_1, a_2, a_3)$**,** $B = (b_1, b_2, b_3)$ **et** $C = (c_1, c_2, c_3)$:

  condition: $[\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = 0$

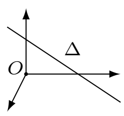
  équations: comme le cas précédent.

  Exemples:

3.2.4 Droites dans l'espace

Droite : $\Delta = \pi \cap \pi'$ intersection de deux plans non parallèles

$$\boxed{\Delta = \left\{ P(x, y, z) \;\middle|\; \begin{array}{l} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{array} \right\}}$$



- La droite d'équations $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ est l'axe Oz.
- La droite d'équations $\begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$ est parallèle à l'axe Oz.

- **Droite passant par** $A = (a_1, a_2, a_3)$ **et parallèle à** $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$:

  condition: $\overrightarrow{AP}$ colinéaire à $\vec{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} = t\vec{v}$

  équation paramétrique: $\boxed{\begin{cases} x - a_1 = tv_1 \\ y - a_2 = tv_2 \\ z - a_3 = tv_3 \end{cases}}$

  équation cartesienne: $\boxed{\dfrac{x - a_1}{v_1} = \dfrac{y - a_2}{v_2} = \dfrac{z - a_3}{v_3}}$

- **Droite passant par** $A = (a_1, a_2, a_3)$ **et** $B = (b_1, b_2, b_3)$:

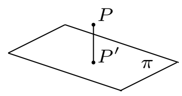
  condition: $\overrightarrow{AP}$ parallèle à $\overrightarrow{AB}$ avec $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$

  équation: comme le cas précédent.

Exemples:

3.2.5 Distance, volume

Distance:



- **d'un point** $P(x, y, z)$ **à un point** $P'(x', y', z')$:

$$\boxed{\operatorname{dist}(P, P') = \|\overrightarrow{PP'}\| = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}.$$

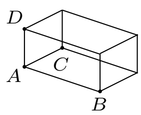
- **d'un point** $P(x, y, z)$ **au un plan** $\pi : ax + by + cz + d = 0$: on appelle P' la projection orthogonale de P sur le plan π, alors

$$\boxed{\operatorname{dist}(P, \pi) = \operatorname{dist}(P, P') = \frac{|ax + by + cz + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}.$$

Volume

du parallelepipède de sommets A, B, C, D, etc:

$$\boxed{\mathrm{Vol} = \left| \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \right] \right|}.$$



Si $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$, alors

$$\boxed{\mathrm{Vol} = |x(y'z'' - z'y'') - y(x'z'' - z'x'') + z(x'y'' - y'x'')|}.$$

Exemple:

3.2.6 Quadriques

Définition: Une **quadrique:** est donnée par une équation de la forme

$$\boxed{\mathcal{Q} = \left\{ (x, y, z) \mid f(x, y, z) = 0 \right\}},$$

où $f(x, y, z)$ est un polynôme de degré 2.

Les quadriques les plus connues:

- **Cylindre**: $\boxed{x^2 + y^2 = r^2}$
- **Cône**: $\boxed{x^2 + y^2 = z^2}$
- **Sphère**: $\boxed{x^2 + y^2 + z^2 = r^2}$
- **Ellipsoïde**: $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1}$

Exemple:

- **Hyperboloïde à une nappe**: $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1}$
- **Hyperboloïde à deux nappes**: $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1}$
- **Paraboloïde**: $\boxed{z = xy}$

  ou bien: $\boxed{z = x^2 + y^2}$

Chapter 4

Fonctions

4.1 Fonctions usuelles

Définition: Une **fonction (réelle)** est un procédé qui, à tout nombre x d'une partie E de l'ensemble des nombres réels, associe un et un seul nombre réel $y \in \mathbb{R}$. On note $y = f(x)$ car elle dépend de x. Une fonction est notée

$$\boxed{f : E \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto y = f(x)}$$

- Lorsqu'on spécifie pas l'ensemble E de départ, on défini le **domaine (de définition)** d'une fonction f comme l'ensemble

$$\boxed{D_f = \Big\{ x \in \mathbb{R} \mid f(x) \text{ a un sens} \Big\}}$$

- L'**image** d'une fonction f est l'ensemble

$$\boxed{I_f = \Big\{ y \in \mathbb{R} \mid y = f(x) \text{ pour un } x \in D_f \Big\}}$$

Attention: une loi qui associe à $x \in \mathbb{R}$ deux valeurs distinctes $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ (ou plus) n'est pas une fonction.

Exemples:

4.1.1 Polynômes, fractions, racines

Définition: On appelle "usuelles" les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suivantes:

- **fonctions polynomiales**, abrégé en "polynômes":

$$\boxed{f(x) = a_o + a_1\, x + a_2\, x^2 + \cdots + a_n\, x^n} \quad a_i \in \mathbb{R},\ \text{avec } \boxed{D_f = \mathbb{R}}.$$

- **fractions rationnelles** : ce sont les quotients de polynômes $a(x)$ et $b(x)$

$$\boxed{f(x) = \tfrac{a(x)}{b(x)}} \quad \text{avec } \boxed{D_f = \Big\{ x \in \mathbb{R} \mid b(x) \neq 0 \Big\}}.$$

- **fonctions racines** : ce sont les racines k-ièmes de polynômes $a(x)$, pour $k \in \mathbb{N}$

$$\boxed{f(x) = \sqrt[k]{a(x)}} \quad \text{défini par} \quad f(x)^k = a(x)$$

avec domaine $\boxed{D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \left\langle \begin{array}{ll} a(x) \in \mathbb{R} & \text{si } k \text{ est impair} \\ a(x) \in \mathbb{R}^+ & \text{si } k \text{ est pair} \end{array} \right. \right\}}$.

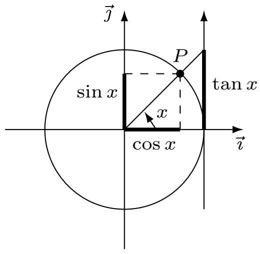
Exemples

4.1.2 Fonctions circulaires

- **cosinus** $\boxed{f(x) = \cos x}$ avec $\boxed{D_{\cos} = \mathbb{R}}$ et $\boxed{I_{\cos} = [-1, 1]}$

- **sinus** $\boxed{f(x) = \sin x}$ avec $\boxed{D_{\sin} = \mathbb{R}}$ et $\boxed{I_{\sin} = [-1, 1]}$

  où $(\cos x, \sin x)$ sont les coordonnées du point P qui se trouve sur le cercle unitaire à angle x mesuré dans le sens antihoraire depuis l'axe de direction $\vec{\imath}$.



  Puisque le cercle a équation $X^2 + Y^2 = 1$, si on pose $X = \cos x$ et $Y = \sin x$ on a

  $\boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- **tangente** $\boxed{f(x) = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}}$ avec

$$\boxed{D_{\tan} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\tfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\}} \quad \text{et} \quad \boxed{I_{\tan} = \mathbb{R}}$$

4.1.3 Inverses des fonctions trigonométriques

- **arccosinus** $\boxed{f(x) = \arccos x}$

  $\arccos x$ est l'angle **compris entre** 0 **et** π qui a x comme cosinus, c.-à-d. $\arccos x = \theta \iff x = \cos\theta$ et $\theta \in [0, \pi]$, alors

$$\boxed{D_{\arccos} = [-1, 1]} \quad \text{et} \quad \boxed{I_{\arccos} = [0, \pi]}$$

- **arcsinus** $\boxed{f(x) = \arcsin x}$

  $\arcsin x$ est l'angle **compris entre** $-\frac{\pi}{2}$ **et** $\frac{\pi}{2}$ qui a x comme sinus, c.-à-d. $\arcsin x = \theta \iff x = \sin\theta$ et $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, alors

$$\boxed{D_{\arcsin} = [-1, 1]} \quad \text{et} \quad \boxed{I_{\arcsin} = [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]}$$

- **arctangente** $\boxed{f(x) = \arctan x}$

  $\arctan x$ est l'angle **compris entre** $-\frac{\pi}{2}$ **et** $\frac{\pi}{2}$ qui a x comme tangente, c.-à-d. $\arctan x = \theta \iff x = \tan\theta$ et $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, alors

$$\boxed{D_{\arctan} = \mathbb{R}} \quad \text{et} \quad \boxed{I_{\arctan} =]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[}$$

Exemples

4.1.4 Fonction exponentielle

- La **fonction exponentielle**, abrégé en “exponentiel”, de base le **nombre de Néper** (de Euler et Napier, XVII s.)

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} \simeq 2,7182$$

est la fonction $\boxed{f(x) = e^x = \exp x}$ qui peut être définie de plusieurs façons :

i) c'est la seule fonction continue qui trasforme une somme en produit, $\exp(x+y) = \exp(x)\,\exp(y)$, et qui vaut e en $x=1$;

ii) c'est la seule solution de l'équation différentielle $f'(x) = f(x)$ qui vaut 1 en $x=0$;

iii) comme somme de série $e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,x^n$.

On a $\boxed{D_{\exp} = \mathbb{R}}$ et $\boxed{I_{\exp} =]0,\infty[}$.

4.1.5 Fonction logarithme

- La **fonction logarithme naturel**, abrégé en “logarithme”, est la fonction $\boxed{f(x) = \ln x}$ telle que

$$\ln x = y \quad \Leftrightarrow \quad e^y = x.$$

Elle peut également être définie des façons suivantes :

i) c'est la seule fonction continue qui trasforme un produit en somme, $\ln(x\,y) = \ln(x) + \ln(y)$, et qui vaut 1 en $x=e$;

ii) c'est la seule primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui vaut 0 en $x=1$.

On a $\boxed{D_{\ln} =]0,\infty[}$ et $\boxed{I_{\ln} = \mathbb{R}}$.

4.1.6 Fonctions hyperboliques

- **cosinus hyperbolique** $\boxed{f(x) = \operatorname{ch} x = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}}$

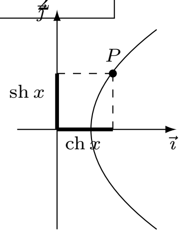
avec $\boxed{D_{\text{ch}} = \mathbb{R}}$ et $\boxed{I_{\text{ch}} = [1,\infty[}$

- **sinus hyperbolique** $\boxed{f(x) = \operatorname{sh} x = \sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}}$ avec $\boxed{D_{\operatorname{sh}} = \mathbb{R}}$ et $\boxed{I_{\operatorname{sh}} = \mathbb{R}}$

  On a

  $\boxed{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$,

  donc $(\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x)$ sont les coordonnées des points P qui se trouvent sur la branche droite de l'hyperbole d'équation $X^2 - Y^2 = 1$



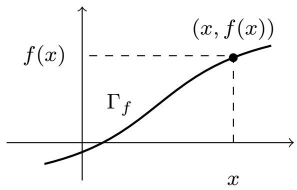
- **tangente hyperbolique**

  $\boxed{f(x) = \operatorname{th} x = \tanh x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}}$ avec $\boxed{D_{\operatorname{th}} = \mathbb{R}}$ et $\boxed{I_{\tan} =]-1, 1[}$

4.2 Graphes

<u>Définition:</u> Le **graphe** d'une fonction f est l'ensemble des points du plan

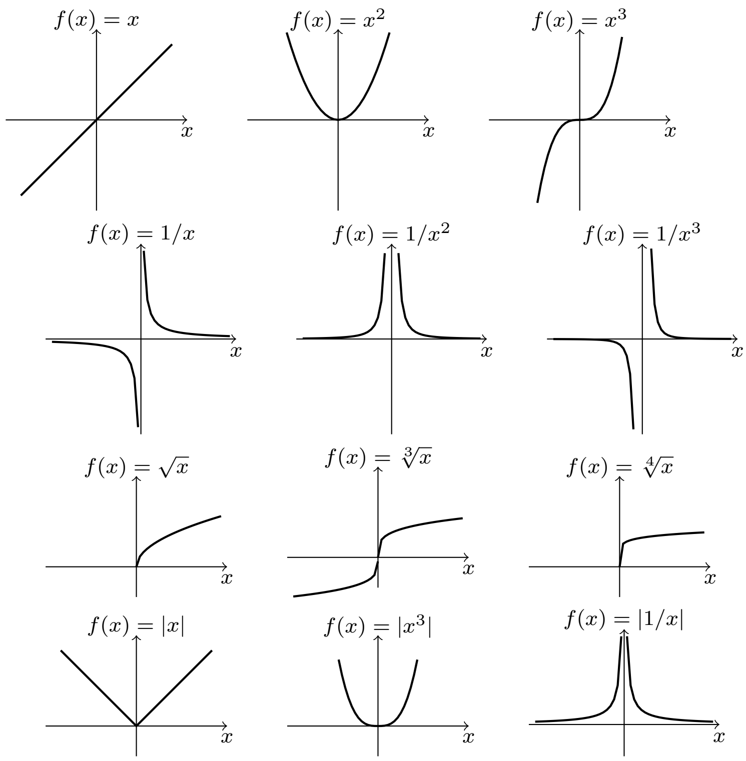
$$\Gamma_f = \Big\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in D_f,\ y = f(x) \Big\}$$
$$= \Big\{ \big(x, f(x)\big) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in D_f \Big\} \subset \mathbb{R}^2$$

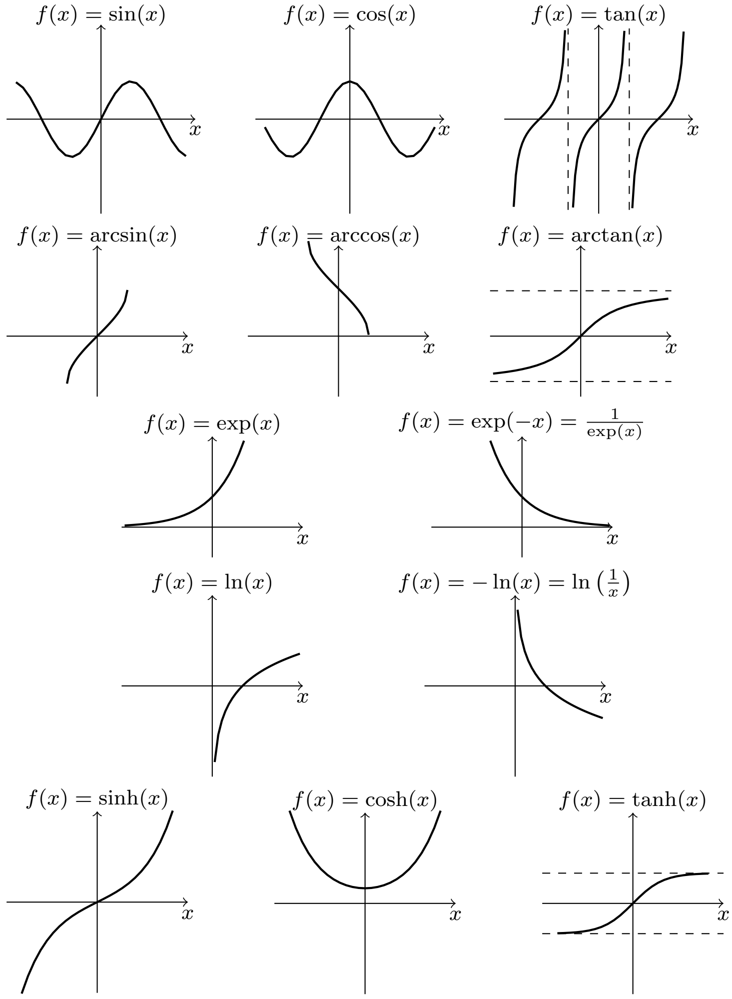


En regardant le graphe d'une fonction on peut déduire quel est son domaine, son image et ses proprietés importantes.

Le graphe des fonctions usuelles est à connaître par cœur.

4.2.1 Graphes des fonctions usuelles (à connaître)



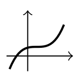


4.2.2 Fonctions croissantes, decroissantes, monotones

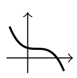
La première proprieté qu'on voit sur le graphe est la croissance.

Définition: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $D \subset D_f$. On dit que:

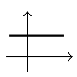
- f est **strictement croissante sur** D si pour tout $x, y \in D$ tels que $x < y$ on a $\boxed{f(x) < f(y)}$.



- f est **strictement décroissante sur** D si pour tout $x, y \in D$ tels que $x < y$ on a $\boxed{f(x) > f(y)}$.



- f est **constante sur** D si pour tout $x, y \in D$ on a $\boxed{f(x) = f(y)}$.



Si on n'indique pas l'ensemble D, on sous-entend qu'on parle de tout le domaine de définition D_f.

- f est **strictement monotone** si elle est partout strictement croissante ou partout strictement décroissante sur D_f.

Remarque : L'appellatif strictement peut être omis si on considère des inégalités larges $\leq$ et $\geq$.

Exemples:

- Les polynômes x^n sont

- Les fractions $\frac{1}{x^n}$ sont

- Les racines $\sqrt[k]{x}$ sont
- Les fonctions circulaires $\sin x$ et $\cos x$

  La tangente $\tan x$

- Les fonctions $\arcsin x$ et $\arctan x$ sont

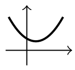
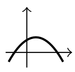
  alors que $\arccos x$ est
- L'exponentiel e^x et le logarithme $\ln x$ sont
- Les fonctions hyperboliques $\sinh x$ et $\tanh x$ sont

  alors que $\cosh x$ est

4.2.3 Fonctions convexes et concaves

La deuxième proprieté qu'on voit sur le graphe est la convexité.

Définition: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $D \subset D_f$. On dit que:

- f est **convexe sur** D si elle a la forme 
- f est **concave sur** D si elle a la forme 

  Si on n'indique pas l'ensemble D, on sous-entend qu'on parle de tout le domaine de définition D_f.

  Exemples:

- Les polynômes x^n et les fractions $\frac{1}{x^n}$ sont

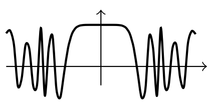
- Les racines $\sqrt[k]{x}$ sont
- L'exponentiel e^x est
- Le logarithme $\ln x$ est

4.2.4 Fonctions paires, impaires et périodiques

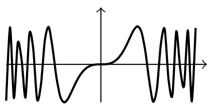
La troisième proprieté qu'on voit sur le graphe est la symétrie.

Définition: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que:

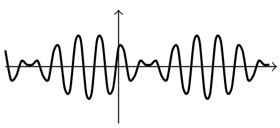
- f est **paire** si $\boxed{f(-x) = f(x)}$ pour tout $x \in D_f$ (symétrie axiale).



- f est **impaire** si $\boxed{f(-x) = -f(x)}$ pour tout $x \in D_f$ (symétrie centrale).



- f est **périodique** de **période** p si $\boxed{f(x+p) = f(x)}$ pour tout $x \in D_f$ (symétrie par translation).



Exemples:

- Les polynômes x^n et les fractions $\frac{1}{x^n}$ sont des fonctions

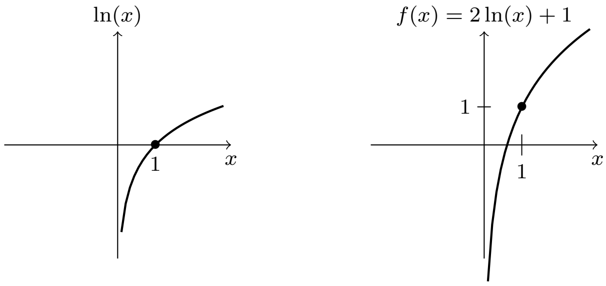
- Les fonctions $\sin x$ et $\tan x$ sont
 et $\cos x$ est
 Toutes les trois sont périodiques: $\sin x$ et $\cos x$ de période
 et $\tan x$ de période

4.2.5 Exercice

Exercice: *Pour les fonctions suivantes, dessiner le graphe, préciser le domaine de définition et si elles sont monotônes (croissantes ou decroissantes), paires ou impaires et périodiques.*

- $f(x) = 2\ln x + 1$

Réponse: Le graphe de $f(x) = 2\ln x + 1$ se trouve en dilatant par 2 le graphe de $x \mapsto \ln x$ et en décalant tout de $+1$:

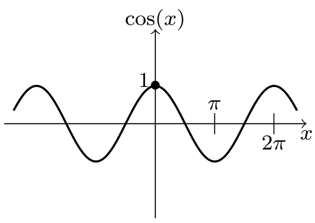


Le domaine de f est $\quad D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} =]0, \infty[$.

La fonction f est monotône croissante, ni paire ni impaire.

- $u(\theta) = \cos(2\theta) - 1$

Réponse: Le graphe de $u(\theta) = \cos(2\theta) - 1$ se trouve en décalant de -1 le graphe de la fonction $f(x) = \cos x$ où $x = 2\theta$:



Le domaine de u est $\quad D_u = \{\theta \in \mathbb{R} \mid 2\theta \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$.

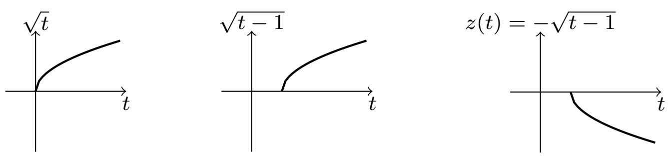
La fonction u n'est pas monotône, et elle est paire.

Elle est clairement périodique de période π:

$$\begin{aligned} u(\theta + \pi) &= \cos\big(2(\theta + \pi)\big) - 1 = \cos(2\theta + 2\pi) - 1 \\ &= \cos(2\theta) - 1 = u(\theta). \end{aligned}$$

- $z(t) = -\sqrt{t-1}$

Réponse: Le graphe de $z(t) = -\sqrt{t-1}$ se trouve par étapes: on dessine la fonction $\sqrt{t}$, on décale la variable independante de t à $t-1$ en bougéant l'axe vertical de -1 en horizontal, enfin on prend son opposé $-\sqrt{t-1}$.



Le domaine de la fonction z est $D_z = \{t \in \mathbb{R} \mid t-1 \geq 0\} = [1, \infty[$.
La fonction z est monotône décroissante, elle n'est ni paire ni impaire.

4.3 Opérations

Définition: Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions, et $t \in \mathbb{R}$.

- **addition**: $\boxed{(f+g)(x) = f(x) + g(x)}$ avec domaine

$$D_{f+g} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in D_f \text{ et } x \in D_g\} = D_f \cap D_g$$

- La **composée** de deux fonctions $x \mapsto f(x)$ et $y \mapsto g(y)$ est la fonction $g \circ f$ définie par

$$\boxed{(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)}$$

avec domaine $\boxed{D_{g \circ f} = \big\{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\big\}}$.

La composition peut être vue comme l'<u>enchainement</u> des fonctions l'une après l'autre:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "(g \circ f)(x)"'] & f(x) \arrow[r] & g\big(f(x)\big) \end{tikzcd} \quad : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

ou également comme la <u>substitution</u> de la variable y, dans $g(y)$, par la valeur $y = f(x)$.

Exemple:

Proprietés:

- La composition est <u>associative</u>: $\boxed{\big(h \circ g\big) \circ f = h \circ \big(g \circ f\big)}$
  mais elle <u>n'est pas commutative</u>: $\boxed{g \circ f \neq f \circ g}$ en général.

Exemple: Si $f(x) = x^2$, $g(y) = \sin y$ et $h(z) = \ln z$, on a

$$(h \circ g)(y) = \ln(\sin y) \quad \text{donc} \quad \big((h \circ g) \circ f\big)(x) = \ln(\sin(x^2))$$
$$(g \circ f)(x) = \sin(x^2) \quad \text{donc} \quad \big(h \circ (g \circ f)\big)(x) = \ln(\sin(x^2))$$

et

$$(g \circ f)(x) = \sin(x^2) \quad \text{mais} \quad (f \circ g)(y) = (\sin y)^2.$$

- La fonction **identité** $\boxed{\mathrm{id}(x) = x}$, avec domaine $D_{\mathrm{id}} = \mathbb{R}$, est une <u>unité</u> pour la composition: $\boxed{f \circ \mathrm{id} = \mathrm{id} \circ f = f}$.

4.4 Réciproques

Définition: La **réciproque** d'une fonction $x \mapsto f(x)$ est la fonction $y \mapsto f^{-1}(y)$ telle que

$$\boxed{f^{-1} \circ f = \mathrm{id}} \quad \text{et} \quad \boxed{f \circ f^{-1} = \mathrm{id}}$$

c'est-à-dire telle que

$$\boxed{\begin{array}{l} f^{-1}(f(x)) = x \\ \text{pour tout } x \in D_f \end{array}} \quad \text{et} \quad \boxed{\begin{array}{l} f(f^{-1}(y)) = y \\ \text{pour tout } y \in I_f \end{array}}$$

ce qui peut être resumé en une seule assertion:

$$\boxed{f^{-1}(y) = x \quad \Longleftrightarrow \quad y = f(x)}$$

Ceci implique que $\boxed{D_{f^{-1}} = I_f}$ et $\boxed{I_{f^{-1}} = D_f}$.

En conclusion, on peut visualiser la réciproque comme ceci:

$$\begin{array}{ccc} D_f = I_{f^{-1}} & & I_f = D_{f^{-1}} \\ x = f^{-1}(y) & \overset{f}{\underset{f^{-1}}{\rightleftarrows}} & y = f(x) \end{array}$$

Exemples :

4.4.1 Proprietés des réciproques

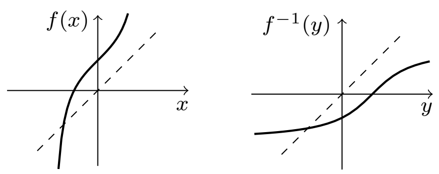
Théorème: Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On note $J = f(I)$. Si $f : I \to J$ est strictement monotone alors elle est inversible.

Idée de la preuve : En effet, si f n'est pas strictement monotône, il existe deux points distincts x_1 et x_2 qui donnent la même valeur $y = f(x_1) = f(x_2)$.

Dans ce cas, comment va-t-on définir la réciproque f^{-1} au point y, $f^{-1}(y) = x_1$ ou bien $f^{-1}(y) = x_2$? Ce choix est impossible.

Proprietés:

- Si f est strictement monotône et on note Γ_f son graphe, la réciproque f^{-1} est aussi strictement monotône et son graphe est l'image miroir de Γ_f par rapport à la droite $y = x$.



- La réciproque de la réciproque de f est f: $\boxed{\left(f^{-1}\right)^{-1} = f}$.

4.4.2 Réciproque des fonctions non monotones

Problème:

- Les polynômes x^n de puissance impaire et l'exponentielle e^x sont continues et monotones et admettent une réciproque, respectivement les racines $\sqrt[n]{x}$ d'ordre impair et le logarithme $\ln x$:

$$\boxed{x = \sqrt[n]{y} \quad \Longleftrightarrow \quad x^n = y}$$
$$\boxed{x = \ln y \quad \Longleftrightarrow \quad e^x = y}$$

- Les polynômes x^n de puissance paire et les fonctions circulaires $\sin x$, $\cos x$ et $\tan x$ n'admettent donc pas de réciproque! Que faire?

Astuce: Si une fonction f n'est pas monotone, on peut restreindre son domaine de définition à un ensemble $D \subset D_f$ tel que

i) f soit continue et monotone sur D,

ii) $f(D) = I_f$.

Cette fonction "à domaine restreint" $\boxed{f : D \subset D_f \to I_f}$ admet bien une réciproque "à image restreinte":

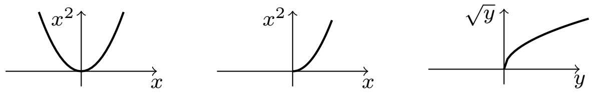
$$\boxed{f^{-1} : I_f \to D \subset D_f}.$$

Exemples:

- Les polynômes x^n de puissance paire restreints à l'ensemble $[0, \infty[\subset \mathbb{R}$ ont comme réciproque les racines $\sqrt[n]{x}$ d'ordre pair:

$$\boxed{x = \sqrt[n]{y} \quad \Longleftrightarrow \quad x^n = y \quad \text{et} \quad x \geq 0}$$

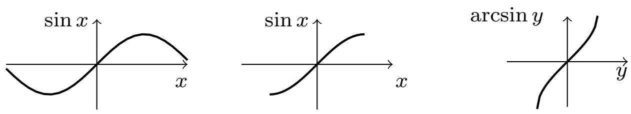
Ex.:



- Les fonctions circulaires $\sin x$, $\cos x$ et $\tan x$, opportunement restreintes, ont comme réciproque les fonctions arc $\arcsin x$, $\arccos x$ et $\arctan x$:

$$\boxed{x = \arcsin y \quad \Longleftrightarrow \quad \sin x = y \quad \text{et} \quad x \in [-\pi/2, \pi/2]}$$
$$\boxed{x = \arccos y \quad \Longleftrightarrow \quad \cos x = y \quad \text{et} \quad x \in [0, \pi]}$$
$$\boxed{x = \arctan y \quad \Longleftrightarrow \quad \tan x = y \quad \text{et} \quad x \in]-\pi/2, \pi/2[}$$

Ex.:



Chapter 5

Dérivées

5.1 Continuité

Idée de la limite : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de la variable x. La **limite de f lorsque x tend vers x_0**, notée $\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x)}$, est la
valeur à laquelle tend $f(x)$ quand x s'approche de x_0 (sans le toucher). Cette limite peut être un nombre réel, $\pm\infty$, ou ne pas exister.

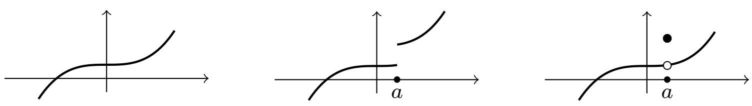
Exemple :

Définition Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de la variable x. On dit que

- f **est continue en un point** $a \in D_f$ si

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = f(a)}.$$

- f **est continue** si elle l'est en tout point $a \in D_f$.



continue | non continue en a, $\lim_{x \to a} f(x)$ n'existe pas | non continue en a, $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$

Proposition:

1. Les fonctions usuelles sont continues sur leur domaine de définition.
2. La somme, produit et composée de fonctions continues est continue.

5.2 Fonctions dérivables

Définition Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de la variable x.

- On appelle **dérivée de** f **en** $a \in D_f$ la limite

$$\boxed{\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}},$$

si cette limite existe et c'est un nombre réel. Dans ce cas, on dit que f **est dérivable en** a et on note cette limite $\frac{df}{dx}(a)$ ou $f'(a)$.

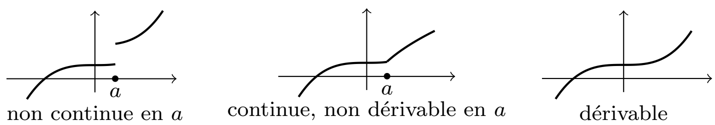
- On dit que f **est dérivable sur** $D \subset D_f$ si elle l'est en tout point $a \in D$.

- Si f est dérivable sur D, la **fonction dérivée** est la fonction

$$\frac{df}{dx} = f' : D \to \mathbb{R},\ x \mapsto f'(x).$$

Exemple: Si $f(x) = x^2$

Remarque: Une fonction dérivable est continue, le contraire est faux: il y a des fonctions continues qui ne sont pas dérivables.



Proposition:

1. Les fonctions usuelles (ch. 4) sont dérivables, sauf les racines $\sqrt[n]{x}$ d'ordre n pair, en $x = 0$.

2. La somme, produit et composée de fonctions dérivables est dérivable.

Exemples:

- $f(x) = 3x^2 + \sin(\sqrt{x^3 - 1}) + \ln(3x^2 + 1)$ est dérivable sur

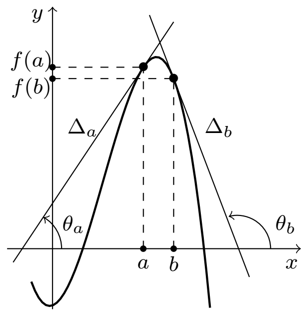
- La valeur absolue

5.3 Droite tangente et croissance

Proposition: Si f est dérivable en a, alors le graphe Γ_f a une droite tangente Δ_a au point $(a, f(a))$, d'équation

$$\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$$

et on a $\boxed{f'(a) = \tan\theta_a}$, où θ_a est l'angle formé par la droite tangente Δ_a à partir de l'axe Ox.



Exemple :

Par conséquent, la dérivée donne un critère pour établir la croissance d'une fonction dérivable.

Proposition: Si f est une fonction dérivable en x, on a:

$$\boxed{f \text{ est croissante en } x} \Leftrightarrow 0 < \theta_x < \pi/2 \Leftrightarrow \boxed{f'(x) = \tan\theta_x > 0}$$

$$\boxed{f \text{ est décroissante en } x} \Leftrightarrow \pi/2 < \theta_x < \pi \Leftrightarrow \boxed{f'(x) = \tan\theta_x < 0}$$

5.4 Dérivée des fonctions usuelles (par coeur !)

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	$n\ x^{n-1}$
$\frac{1}{x^n}$	$-n\ \frac{1}{x^{n+1}}$
$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$	$\frac{1}{n}\ x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x} = 1-\tanh^2 x$

5.5 Propriétés de la dérivée

Proposition: Si f et g sont dérivables en $x \in \mathbb{R}$, et $t \in \mathbb{R}$, on a:

1. $\boxed{\dfrac{d}{dx}\big(f(x)+g(x)\big) = f'(x)+g'(x)}$
2. $\boxed{\dfrac{d}{dx}\big(t\,f(x)\big) = t\,f'(x)}$
3. $\boxed{\dfrac{d}{dx}\big(f(x)g(x)\big) = f'(x)\,g(x)+f(x)\,g'(x)}$ **règle de Leibniz**
4. si $f(x) \neq 0$, on a $\boxed{\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{f(x)}\right) = -\dfrac{f'(x)}{f(x)^2}}$
5. si $g(x) \neq 0$, on a $\boxed{\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{f'(x)\,g(x)-f(x)\,g'(x)}{g(x)^2}}$

Exemples:

5.6 Dérivée des fonctions composées

Proposition: Soit f une fonction dérivable en x, g une fonction dérivable en $y = f(x)$ et $g \circ f$ la composée. Alors:

1. $$\boxed{(g \circ f)'(x) = \tfrac{d}{dx}\big(g(f(x)\big) = g'\big(f(x)\big)\,f'(x)}$$
2. si f admet la réciproque f^{-1} et $y = f(x) \neq 0$, alors
$$\boxed{(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(y)\big)}}$$

Exemples:

5.7 Extrema locaux

5.7.1 Points critiques

Définition: Soit f une fonction dérivable en $a \in D_f$. Le point a s'appelle **point critique** de f si $\boxed{f'(a) = 0}$.

Dans ce cas, la tangente Δ_a est la droite horizontale $\boxed{y = f(a)}$.

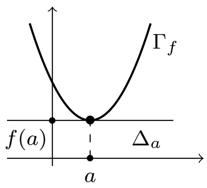
Exemples: Le graphe de la fonction

$$f(x) = (x-1)^2 + 1$$

est une parabole. On a $f'(x) = 2(x-1)$, donc $a = 1$ est un point critique de f. La droite tangente Δ_a, qui a équation

$$y = 0\,(x-1) + 1 = 1,$$

est bien horizontale.

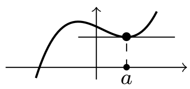


5.7.2 Extrema locaux et points d'inflexion

Les points critiques peuvent être de trois types:

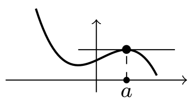
Définition: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in D_f$. On dit que

- f a un **minimum local** en a si $\boxed{f(x) > f(a)}$ pour tout x proche de a (f est convexe autour de a).



minimum local

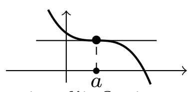
- f a un **maximum local** en a si $\boxed{f(x) < f(a)}$ pour tout x proche de a (f est concave autour de a).



maximum local

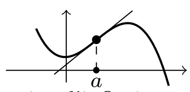
Les minima et maxima locaux s'appellent aussi **extrema locaux**.

- f a un **point d'inflexion** en a si, au point $(a, f(a))$, le graphe Γ_f change de concavité ou autrement dit le graphe Γ_f traverse la droite tangente Δ_a.



point d'inflexion

  Cela peut arriver aussi quand la droite tangente Δ_a n'est pas horizontale.



point d'inflexion

Pour distinguer ces trois types de points on a besoin des dérivées supérieures.

5.7.3 Dérivées d'ordre supérieur

Définition:

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle **dérivée d'ordre** n de f la fonction

$$x \mapsto f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(\cdots \frac{df}{dx}(x)\right)\right)$$

  que l'on obtient en dérivant f successivement n fois.

- Si la fonction $f^{(n)}$ est bien définie sur $D \subset D_f$, on dit que f **est dérivable** n **fois sur** D. Si cela arrive pour tout $n \in \mathbb{N}$, on dit que f est **lisse** ou **de classe** C^∞.

Exemples:

Critère pour établir la nature d'un point critique :

Théorème: Soit : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction lisse sur D et soit $a \in D$ un point critique ($f'(a) = 0$). Alors:

i) f est constante autour de a ssi toutes les dérivées de f s'annullent en a, c.-à-d. $f^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

ii) Sinon, soit n l'ordre de la première dérivée de f non nulle en a, c.-à-d. que $f^{(n)}(a) \neq 0$ et $f^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k < n$:

   - a est un minimum local ssi n est pair et $f^{(n)}(a) > 0$,
   - a est un maximum local ssi n est pair et $f^{(n)}(a) < 0$,
   - a est un point d'inflexion ssi n est impair.

En particulier, si a est un point critique ($f'(a) = 0$), on a:

- Si $f''(a) > 0$, alors a est un minimum local.
- Si $f''(a) < 0$, alors a est un maximum local.
- Si $f''(a) = 0$ (a s'appelle **point plat**), pour connaitre la nature de a il faut regarder les dérivées d'ordre supérieur.

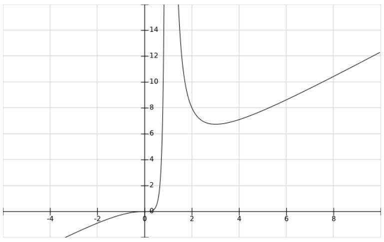
Exemple

Trouver les points critiques de la fonction

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2},$$

et détérminer s'ils sont des extrema locaux ou des points d'inflexion.

En effet, le graphe de f est:



5.8 Polynôme de Taylor et approximations

5.8.1 Définition

Théorème: Toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable n fois en un point a peut être approximée en tout point x proche de a par un polynôme de degré n dont les coefficients dépendent uniquement des dérivées de f en a, qui s'appelle **polynôme de Taylor d'ordre n de f en a**:

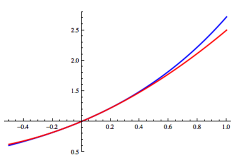
$$\boxed{T_a^n f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n}.$$

Le niveau d'approximation est mésuré par le **reste**

$$\boxed{R_a^n f(x) = f(x) - T_a^n f(x)},$$

qui tend vers 0 lorsque $x \to a$.

Exemple: Voici les graphes de
$$f(x) = e^x \quad \text{(en bleu)}$$
et de son polynôme de Taylor d'ordre 2 en $a = 0$
$$T_0^2 f(x) = 1 + x + x^2/2 \quad \text{(en rouge).}$$



Les restes en $x = 1$ et en $x = 0.1$ valent:

$$R_0^2 f(1) = e - (1 + 1 + 1/2) \simeq -0.83 \quad \text{(mauvaise approximation)}$$
$$R_0^2 f(0.1) = e^{0.1} - (1 + 0.1 + 0.01/2) \simeq -0.0018 \quad \text{(bonne approximation)}$$

5.8.2 Polynômes de Taylor importants (autour de 0)

$f(x)$	$T_0^n f(x)$
$\frac{1}{1+x}$	$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n$
$\frac{1}{1-x}$	$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$
$(1+x)^\alpha$	$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!} x^n$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \cdots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}$
$\sin x$	$x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1}$
$\cos x$	$1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n}$
e^x	$1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n$
$\ln(1+x)$	$x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n}x^n$
$\ln(1-x)$	$x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{1}{n}x^n$

Exercice: Trouver le polynôme de Taylor à l'ordre 2 de la fonction

$$f(x) = \frac{4-x}{2+x}$$

autour des points $a = 0$ et $b = 1$.

5.8.3 Estimation du reste

Rappel: Le théorème de Taylor garantit que si f est dérivable n fois autour de a, alors il existe un polynôme $T_a^n f(x)$ qui est une bonne approximation de f quand $x \to a$, c'est-à-dire tel que

$$f(x) = T_a^n f(x) + R_a^n f(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to a} R_a^n f(x) = 0.$$

Formule de Young: Le reste $R_a^n f(x)$ est négligéable par rapport au polynôme de Taylor:

$$\boxed{R_a^n f(x) = o\big((x-a)^n\big)},$$

où $o(h)$ est une fonction qui tend vers 0 plus vite que h, c'est à dire $\lim_{h\to 0} \frac{o(h)}{h} = 0$.

Formule de Lagrange: Si f est dérivable $n+1$ fois au point a, alors pour tout x proche de a il existe une valeur c comprise entre a et x telle que

$$\boxed{R_a^n f(x) = \tfrac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}}.$$

Chapter 6

Intégrales

6.1 Primitives

<u>**Définition:**</u> Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction. Une **primitive de** f **sur** $[a,b]$ est une fonction $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable, telle que

$$\boxed{F'(x) = f(x)} \quad \text{pour tout } x \in [a,b].$$

On note $F(x) = \displaystyle\int f(x)\,dx$.

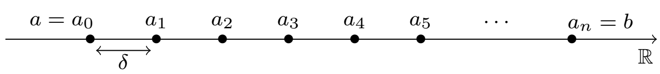
<u>**Remarque:**</u> Toute autre primitive de f diffère de F par une constante.

<u>**Exemples :**</u>

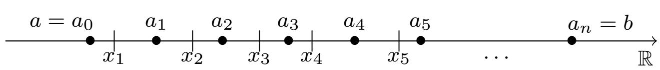
6.2 Somme de Riemann d'une fonction et aire

Définition – Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction.

- Une **subdivision** $\mathcal{S}_n$ de $[a,b]$ est une partition de l'intervalle $I = [a,b]$ en n intervalles $I_i = [a_{i-1}, a_i]$ (pour $i = 1, ..., n$) de longueur $\delta = \frac{b-a}{n}$, avec $a_0 = a$ et $a_n = b$.

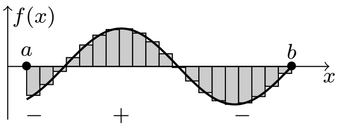


- Pour tout choix de n points $x_i \in I_i$



on appelle **somme de Riemann de** f la somme

$$\boxed{R_n(f;\{x_i\}) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\delta}$$



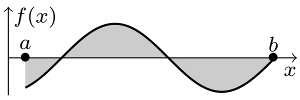
Chaque terme $f(x_i)\,\delta$ est l'**aire algébrique** ($= \pm$ aire) du rectangle de base I_i et hauteur $f(x_i)$.

Exemple :

Définition :

- Si la limite $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(f;\{x_i\})$ existe, c'est un nombre réel et elle est indépendante du choix des points x_i, on l'appelle **intégrale de Riemann de** f **sur** $[a,b]$:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \text{tout } x_i}} R_n(f;\{x_i\})}$$



et on dit que f est **intégrable au sens de Riemann sur** $[a,b]$.

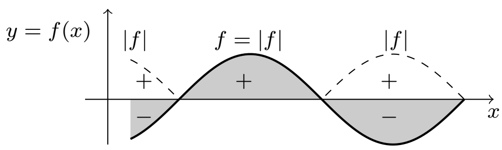
- Toujours pour $a < b$, on pose aussi $\boxed{\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx}$

Théorème : Les fonctions continues et celles à forme d'escalier sont intégrables.

Remarque

- $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \text{ aire “algébrique” sous le graphe de } f}$

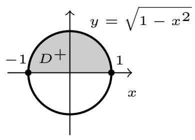
- $\boxed{\int_a^b |f(x)|\,dx = \text{ aire sous le graphe de } f}$ (positive)



Exemple: L'aire du disque

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

se calcule comme une intégrale:



Proprietés:

1. $\displaystyle\int_a^b 0\,dx = 0$

2. $\displaystyle\int_a^b dx = b - a =$ longueur de $[a,b]$

3. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

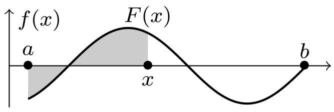
4. Si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a,b]$: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

5. $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\;dx$

6.3 Relation entre intégrale et primitives

Théorème fondamental du calcul intégral : Soit f une fonction intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$. Alors, pour tout $c \in \mathbb{R}$, la fonction $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie en tout $x \in [a,b]$ par

$$\boxed{F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + c}$$



est une primitive de f (i.e. $F'(x) = f(x)$) telle que $F(a) = c$.

En mots: l'aire sous le graphe de f entre a et x donne une primitive $F(x)$.

Corollaire: On peut donc calculer l'intégrale de f si on connait une primitive F de f, avec la formule

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a) = \big[F(x)\big]_a^b}$$

Exemple :

Il ne reste plus qu'à apprendre les techniques d'intégration pour trouver la primitive.

6.4 Calcul de primitives et intégrales

Pour calculer les primitives et les intégrales, on part des cas connus et on modifie la fonction à intégrer en utilisant les théorèmes suivants.

6.4.1 Intégrer une somme de fonctions

Théorème :

- $\boxed{\displaystyle\int (\lambda\, f(x) + \mu\, g(x))\,dx = \lambda \int f(x)\,dx + \mu \int g(x)\,dx}$

- $\boxed{\displaystyle\int_a^b (\lambda\, f(x) + \mu\, g(x))\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx}$

Exemples :

6.4.2 Intégration par parties

On utilise cette méthode pour intégrer certains produits de fonctions

Théorème (Intégration par parties) :

- $\boxed{\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\ g(x)\,dx}$
- $\boxed{\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = \Big[f(x)\ g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx}$

Exemples:

6.4.3 Changement de variable

On utilise cette méthode si la foncion à intégrer est une composée de fonctions.

Définition : Un **changement de variable de** $x\in[a,b]$ **en** $t\in[\alpha,\beta]$ est l'expression de x comme fonction de t:

$$\boxed{x = h(t)}$$

où $h:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ est une fonction dérivable (sauf en α et β) avec réciproque $h^{-1}:[a,b]\to[\alpha,\beta]$ aussi dérivable (sauf en a et b), qui exprime t comme fonction de x:

$$\boxed{t = h^{-1}(x)}.$$

On a alors: $\boxed{dx = h'(t)\,dt}$ et $\boxed{dt = \big(h^{-1}\big)'(x)\,dx}$.

Exemple :

Théorème :

1. $\boxed{\int f(x)\,dx = \int f\big(h(t)\big)\,h'(t)\,dt\Big|_{t=h^{-1}(x)}}$
2. $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_{h^{-1}(a)}^{h^{-1}(b)} f\big(h(t)\big)\,h'(t)\,dt}$

3. $\boxed{\int f\big(h(x)\big)\, h'(x)\, dx = \int f(u)\, du\Big|_{u=h(x)}}$

4. $\boxed{\int_a^b f\big(h(x)\big)\, h'(x)\, dx = \int_{h(a)}^{h(b)} f(u)\, du}$

Exemple :

Exercice: *Calculer l'aire du disque* $D = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\big\}$

6.4.4 Intégrales des fonctions circulaires

Règle 1 :

- $\boxed{\int f(\sin x) \cos x\, dx = \int f(t)\, dt\Big|_{t=\sin x}}$ avec $\boxed{\begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x\, dx \end{array}}$

- $\boxed{\int f(\cos x) \sin x\, dx = -\int f(t)\, dt\Big|_{t=\cos x}}$ avec $\boxed{\begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x\, dx \end{array}}$

Exemples:

Règle 2 : Dans les autres cas, on pose $\boxed{t = \tan(x/2)}$, et on a:

$$\boxed{\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}}, \quad \boxed{\sin x = \frac{2t}{1+t^2}} \quad \text{et} \quad \boxed{dx = \frac{2}{1+t^2}\, dt}.$$

Exemple : $\int \frac{1}{\sin x}\, dx$

6.4.5 Fractions rationnelles

Définition : Une **fraction rationnelle** est le quotient $\boxed{f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}}$ de deux polynômes $P(x)$ et $Q(x)$.

Pour calculer la primitive d'une fraction rationnelle on se ramène aux quatre cas qu'on connaît :

a) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\, dx = \ln x$

b) si $n \geq 2$: $\displaystyle\int \frac{1}{x^n}\, dx = -\frac{1}{(n-1)\, x^{n-1}}$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan x$

d) si $n \geq 2$: $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)^n}\, dx = \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{(2n-3)}{2(n-1)} \int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}\, dx$ (intégration par parties, à partir de $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}\, dx$).

1er cas : $\deg P < \deg Q$

Règle 1 : Dans les cas suivants, qu'on appelle **éléments simples**, on pose $t = u(x)$ et $dt = u'(x)\, dx$:

a) $\boxed{\displaystyle\int \frac{u'(x)}{u(x)}\, dx = \ln u(x)}$

Exemple :

b) si $n \geq 2$: $\boxed{\displaystyle\int \frac{u'(x)}{u(x)^n}\, dx = -\frac{1}{(n-1)\, u(x)^{n-1}}}$

Exemple :

c) $\boxed{\displaystyle\int \frac{u'(x)}{1+u(x)^2}\, dx = \arctan u(x)}$

Exemple :

d) si $n \geq 2$: $\boxed{\displaystyle\int \frac{u'(x)}{(1+u(x)^2)^n}\, dx = \cdots}$ trop long, on l'omet.

Règle 2:

Dans tout autre cas où $\deg P < \deg Q$, le dénominateur $Q(x)$ n'est pas irréductible, car les polynômes réels irréductibles sont:

- de degré 1 de la forme $ax+b = u(x)$ avec $u'(x) = a \quad \Rightarrow \quad$ cas a),
- de degré 2 de la forme $c\big((ax+b)^2+1\big) = c\big(u(x)^2+1\big) \quad \Rightarrow \quad$ cas b).

On factorise $Q(x)$ en polynômes irréductibles:

$$\boxed{Q(x) = Q_1(x)^{n_1} Q_2(x)^{n_2} \cdots Q_r(x)^{n_r}}\,.$$

La primitive $\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ s'écrit alors après un changement de variable comme somme d'éléments simples, de la forme a), b), c) ou d). La difficulté est maintenant de trouver la décomposition en éléments simples....

Exemples et astuces:

2ème cas: $\deg P \geq \deg Q$

Règle 3: En utilisant l'algorithme de division euclidienne pour les polynômes, on divise $P(x)$ par $Q(x)$ et on trouve un quotient de la division $S(x)$ et un reste $R(x)$ tel que $R = 0$ ou $\deg R < \deg Q$. On peut donc écrire

$$\boxed{P(x) = Q(x)S(x) + R(x)}$$

et

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Q(x)S(x) + R(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

Par conséquent, on a

$$\boxed{\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int S(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx},$$

où

- $\int S(x)\,dx$ est facile à calculer car $S(x)$ est un polynôme.
- $\int \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx$ est une fraction comme dans le premier cas et on utilise les règles 1 ou 2.

Exemples :

Chapter 7

Équations différentielles

7.1 Ordre, linéarité, homogénéité

Définition : Une **équation différentielle** (e.d.) est une équation dont l'inconnue est une fonction réelle $y : x \mapsto y(x)$, de variable x, de la forme

$$(E) \qquad \boxed{F\big(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n)}(x)\big) = 0}$$

où F est une expression quelconque réliant la variable x, la fonction y et ses dérivées y', y'', etc (aussi inconnues), jusqu'à un ordre maximale de dérivation $n \geq 1$ qui s'appelle **ordre de l'e.d** (E).

Exemples :

But : résoudre l'e.d. (E), c'est-à-dire trouver la fonction inconnue y qui satisfait (E). La méthode dépend des caractéristiques de l'e.d.

7.1.1 Équations différentielles linéaires et coefficients

Définition :

- L'e.d. (E) est dite **polynômiale** (de degré d) si F est un polynôme (de degré d) dans les inconnues y, y',...,$y^{(n)}$ dont les coefficients sont des fonctions de x. En particulier, (E) est **linéaire** si F est un polynôme de degré 1.

- Si (E) est polynômiale, on appelle **coefficients de** (E) les facteurs des inconnues y, y',...,$y^{(n)}$. Ce sont des fonctions de la variable x, éventuellement constantes.

Exemples :

7.1.2 Équations différentielles homogènes

Définition :

- On appelle **second membre de** (E) le terme (sommant) qui ne contient aucune inconnue y, y',...,$y^{(n)}$. C'est une fonction de x, qui peut être constante et même nulle. Si le second membre est nul l'e.d. (E) est dite **homogène**.

  Exemples :

- On appelle **équation homogène associée à** (E) l'équation (E_0) obtenue en supprimant le second membre.

  Si (E) est homogène, on a $(E_0) = (E)$.

  Exemples :

Exercice: *Pour les équations différentielles (E) suivantes, dire quel est l'ordre, si elles sont linéaires, quels sont les coefficients, si elles sont homogènes ou quel est l'équation homogène associée (E_0).*

- $(E)\,:\,(x+1)\,y'(x) + x^2\,y(x) + x^3 = 0$

- $(E)\,:\,u''(t) - 2u'(t) + u(t) - \sin t = 0$

- $(E)\,:\,x'(t)x'''(t) - \dfrac{1}{1+t}\,x(t) = 0$

7.2 Équations différentielles du 1er ordre linéaires

But : résoudre l'e.d. du 1er ordre linéaire

$$(E) \qquad \boxed{y'(x) = a(x)\,y(x) + b(x)}$$

où a et b sont des fonctions continues sur $D = D_a \cap D_b \subset \mathbb{R}$.

Théorème 1 : Les solutions $y(x)$ de (E) sont les fonctions de la forme

$$\boxed{y(x) = y_0(x) + y_p(x)} \qquad \text{définies pour } x \in D,$$

où $y_0(x)$ est une solution générale de l'e.d. homogène (E_0),
et $y_p(x)$ est une solution particulière de l'e.d. (E).

Nota: Une solution **générale** dépend d'un paramètre réel λ qui détérmine toutes les solutions possibles de l'équation. Tout choix de λ donne une solution.

Une solution **particulière** ne dépend d'aucun paramètre et n'exclut pas qu'il existe des solutions de forme apparemment différente.

7.2.1 Solution générale de l'équation homogène

Théorème 2 : La solution générale de (E_0) $\boxed{y'(x) = a(x)\,y(x)}$ est la fonction

$$\boxed{y_0(x) = \lambda\, e^{A(x)}} \qquad \text{pour tout } \lambda \in \mathbb{R}$$

où $A(x) = \displaystyle\int a(x)\,dx$ est une primitive de $a(x)$.

Preuve: On écrit (E_0) comme

$$\frac{x'(t)}{y(x)} = a(x) \tag{7.1}$$

et on intègre en x pour calculer les primitives à gauche et à droite.
À gauche, en utilisant le changement de variable $u = y(x)$, avec $du = y'(x)\,dx$, on obtient:

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)}\,dx = \ln y(x) + c_1.$$

À droite, on a:

$$\int a(x)\,dx = A(x) + c_2.$$

De l'égalité (7.1) suit alors

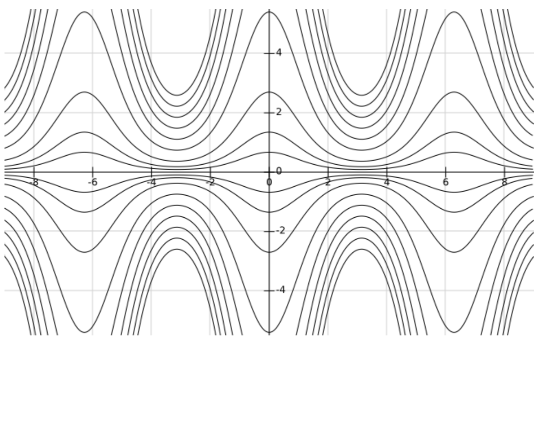
$$\ln y(x) = A(x) + c \quad \text{et donc} \quad y(x) = e^{A(x)+c} = e^c e^{A(x)} = \lambda\, e^{A(x)}.$$

Exemple de solution générale : L'équation homogène $y'(x) + \sin x\; y(x) = 0$ s'écrit

$$(E_0) \qquad y'(x) = -\sin x\; y(x)$$

et a donc comme solution

Voici le graphe de y_0 pour plusieurs valeurs de λ positives et négatives:



7.2.2 Solution particulière de l'équation complète

Théorème 3 : L'e.d. $(E)\,:\,y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$ a une solution particulière de la forme

$$\boxed{y_p(x) = \lambda(x)\,e^{A(x)}} \quad \textbf{(variation de la constante)},$$

où $A(x) = \displaystyle\int a(x)\,dx$ et $\boxed{\lambda(x) = \displaystyle\int \frac{b(x)}{e^{A(x)}}\,dx}$.

Preuve: Cherchons $\lambda(x)$ telle que $y_p(x) = \lambda(t)\,e^{A(x)}$ soit solution de (E).
Dans (E), on remplace $y_p(x) = \lambda(x)\,e^{A(x)}$ et

$$y_p'(x) = \lambda'(x)\,e^{A(x)} + \lambda(x)\,A'(x)\,e^{A(x)}$$

où $A'(x) = a(x)$.
On trouve:

$$\begin{aligned}
(E) \quad &\Leftrightarrow \quad \lambda'(x)\,e^{A(x)} + \lambda(x)\,a(x)\,e^{A(x)} = a(x)\,\lambda(x)\,e^{A(x)} + b(x) \\
&\Leftrightarrow \quad \lambda'(x)\,e^{A(x)} = b(x) \\
&\Leftrightarrow \quad \lambda'(x) = \frac{b(x)}{e^{A(x)}} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda(x) = \int \frac{b(x)}{e^{A(x)}}\,dx.
\end{aligned}$$

Conclusion: $\boxed{y(x) = y_0(x) + y_p(x) = \left(\lambda + \displaystyle\int \frac{b(x)}{e^{A(x)}}\,dx\right) e^{A(x)},\ \lambda \in \mathbb{R}.}$

Exemple de solution particulière Soit $(E)\,:\,y'(x) + \sin x\ y(x) = \sin x$

7.2.3 Condition initiale

But : résoudre une e.d. du 1er ordre linéaire avec une condition initiale

$$(EC) \qquad \boxed{\begin{cases} y'(x) = a(x)\,y(x) + b(x) \\ y(x_1) = y_1 \end{cases}}$$

Théorème 4 : Le système (EC) a une solution unique

$$\boxed{y(x) = \left(\lambda_1 + \int \frac{b(x)}{e^{A(x)}}\,dx\right) e^{A(x)}}$$

où λ_1 est la valeur de λ que l'on obtient en impostant la condition $(C) \quad y(x_1) = y_1 \quad$ aux solutions $y(x)$ de (E)

dépendent de λ.

Exemple: L'e.d. avec condition initiale (EC) $\begin{cases} y'(x) + \sin x \; y(x) = \sin x \\ y(0) = 2 \end{cases}$

7.3 Équa. diff. du 1er ordre non linéaires

Remarque : Pour une e.d. du 1er ordre non linéaire de la forme générale $\boxed{y'(x) = F\big(x, y(x)\big)}$ il n'existe pas toujours une méthode de résolution. On considère un cas résoluble qui couvre plusieurs exemples en physique.

But : résoudre une e.d. du 1er ordre **à variables séparées**

$$(E) \qquad \boxed{y'(x) = a\big(y(x)\big)\, b(x)}$$

où a est une fonction continue.

Théorème : Soit A une primitive de la fonction $1/a$ et A^{-1} sa réciproque. Alors une solution $y(x)$ de (E) est

$$\boxed{y(x) = A^{-1}\left(\int b(x)\, dx + \lambda\right)} \qquad \text{pour tout } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Preuve: On écrit (E) comme $\frac{y'(x)}{a(y(x))} = b(x)$ et on intègre en x avec le changement de variable $u = y(x)$:

$$\int \frac{y'(x)}{a\big(y(x)\big)}\, dx = A\big(y(x)\big) = \int b(x)\, dx + \lambda,$$

d'où suit le résultat.

Exemples:

- $(E) \quad y'(x) = 2xy(x)^2$

- $(E) \quad y'(x) = \dfrac{1}{\cos y(x)}$

7.4 Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

But : résoudre l'e.d. du 2ème ordre linéaire

$$(E) \qquad \boxed{y''(x) + a_1\, y'(x) + a_0\, y(x) = b(x)}$$

où $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ sont constantes et b est une fonction continue sur D.

Théorème 1 : Les solutions $y(x)$ de (E) sont les fonctions de la forme

$$\boxed{y(x) = y_0(x) + y_p(x)} \quad \text{définies pour } x \in D,$$

où $y_0(x)$ est une solution générale de l'e.d. homogène (E_0),
et $y_p(x)$ est une solution particulière de l'e.d. (E).

Nota: Une solution **générale** dépend de deux paramètres réels λ et μ qui détérminent toutes les solutions possibles de l'équation. Tout choix de λ et μ donne une solution.

Une solution **particulière** ne dépend d'aucun paramètre et n'exclut pas qu'il existe des solutions de forme apparemment différente.

7.4.1 Solution générale de l'équation homogène

Théorème 2 : La solution générale de l'équation homogène

$$(E_0) \qquad \boxed{y'' + a_1 y' + a_0 y = 0}$$

dépend des racines du **polynôme caractéristique**

$$P(X) = X^2 + a_1 X + a_0,$$

c'est-à-dire les solutions $z \in \mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = z^2 + a_1 z + a_0 = 0$:

- Si $P(X)$ a deux racines réelles distinctes $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, alors

$$\boxed{y_0(t) = \lambda\, e^{r_1 x} + \mu\, e^{r_2 x}} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

- Si $P(X)$ a une racine réelle double $r \in \mathbb{R}$, alors

$$\boxed{y_0(x) = (\lambda + \mu\, x)\, e^{rx}} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

- Si $P(X)$ a deux racines complexes, elles sont forcement conjuguées, c'est-à-dire de la forme $r \pm i\, s \in \mathbb{C}$ (cf. ch.1), alors

$$\boxed{y_0(x) = \big(\lambda\, \cos(s\, x) + \mu\, \sin(s\, x)\big) e^{r\, x}} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exemples :

- $(E_0) \quad y''(x) - 3y'(x) - 10y(x) = 0$

- $4y''(x) + 4y'(x) + y(x) = 0$

- $(E_0)\quad u''(\theta) - 6\,u'(\theta) + 13\,u(\theta) = 0$

7.4.2 Solution particulière, second membre simple

Remarque : Pour trouver une solution particulière de l'e.d. (E), avec second membre, il existe la méthode de la variation des constantes λ et μ dans la solution générale y_0 de (E_0), mais pour les e.d. du 2ème ordre cette méthode est compliquée, nous traitons des cas particuliers.

But : Trouver une solution particulière de l'e.d.

$$(E) \qquad \boxed{y''(x) + a_1\,y'(x) + a_0\,y(x) = b_1(x) + \cdots + b_k(x)}$$

quand le second membre est la somme de termes de la forme

$$\boxed{b_i(x) = P(x)\,e^{\alpha x}\left(K_1\,\cos(\beta x) + K_2\,\sin(\beta x)\right)},$$

où $P(x)$ est un polynôme et α, β, K_1 et K_2 sont des constantes.

Exemple :

Théorème 3 : La solution particulière de (E) est la somme

$$y_p(x) = y_1(x) + y_2(x) + \cdots + y_k(x)$$

de fonctions correspondantes à chaque $b_i(x)$, de la forme suivante (où Q est un polynôme à trouver, avec $\deg Q = \deg P$):

- Si $b_i(x) = P(x)$, alors

$$y_i(x) = \begin{cases} Q(x) & \text{si } a_0 \neq 0 \\ x\,Q(x) & \text{si } a_0 = 0 \text{ et } a_1 \neq 0 \\ x^2\,Q(x) & \text{si } a_0 = a_1 = 0 \end{cases}$$

- Si $b_i(t) = P(t)\,e^{\alpha t}$, alors

$$y_i(x) = \begin{cases} Q(x)\,e^{\alpha x} & \text{si } \alpha \neq r_1, r_2 \\ x\,Q(x)\,e^{\alpha x} & \text{si } \alpha = r_1 \text{ ou } \alpha = r_2 \\ x^2\,Q(x)\,e^{\alpha x} & \text{si } \alpha = r \end{cases}$$

- Si $b_i(x) = P(x)\,e^{\alpha x}\left(K_1\,\cos(\beta x) + K_2\,\sin(\beta x)\right)$, alors

$$y_i(x) = \begin{cases} e^{\alpha x}\left(Q_1(x)\,\cos(\beta x) + Q_2(x)\,\sin(\beta)\right) & \text{si } \alpha \pm i\beta \neq r \pm is \\ x\,e^{\alpha x}\left(Q_1(x)\,\cos(\beta x) + Q_2(x)\,\sin(\beta x)\right) & \text{si } \alpha \pm i\beta = r \pm is \end{cases}$$

Exemples :

- $(E)\quad y''(x) - 3y'(x) - 10y(x) = (72x^2 - 1)\, e^x$

- $(E)\quad 4y''(x) + 4y'(x) + y(x) = 16\, e^{-x/2}$

- $(E_0)\quad u''(\theta) - 6\, u'(\theta) + 13\, u(\theta) = 75\cos(2\theta)$

7.4.3 Conditions initiales

But: résoudre une e.d. linéaire d'ordre 2 avec deux conditions initiales

$$(EC) \qquad \boxed{\begin{cases} y''(x) + a_1\, y(x) + a_0\, y(x) = b(x) \\ \\ y(x_1) = y_1 \quad \text{et} \quad y'(x_2) = y'_2 \end{cases}}$$

Théorème 4 : Le système (EC) a une solution unique $y(x)$ (donnée au théorème 3) détérminée par la valeur λ et μ des constantes que l'on obtient en imposant les conditions (C).

Exemple :