Chapitre I. Suites et séries numériques.

Suites.

Définition. Une suite réelle (complexe) est une application de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{R}$ (ou dans $\mathbf{C}$), notée $(u_n)_{n\geq 0}$; u_n est appelé le **terme de rang** n. (Quelquefois la suite n'est pas définie pour les premières valeurs de n.)

Définition. On dit que la suite (u_n) est **convergente** et a pour limite l si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N tel que si $n \geq N$ on a $\mid u_n - l \mid < \varepsilon$.

Si la limite l existe, elle est unique.

On note $\lim_{n\to\infty} u_n = l$ ou $u_n \to_{n\to\infty} l$.

.

Autrement dit, la suite (u_n) converge vers l si u_n devient arbitrairement proche de l quand n est suffisamment grand.

Une suite qui ne converge pas est **divergente**.

.

Remarque 1. $\lim_{n\to\infty} u_n = l$ si et seulement si $\lim_{n\to\infty}(u_n - l) = 0$.

Remarque 2. La nature d'une suite et sa limite ne dépendent pas de son début: elles ne changent pas lorsqu'on modifie un nombre fini de ses termes.

.

Exemple: $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{c}{n})^n = e^c$.

.

Définition. Pour une suite (u_n) à termes réels on dit que

$\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$ (respectivement, $\lim_{n\to\infty} u_n = -\infty$) si pour tout réel A il existe N tel que si $n \geq N$ on a $u_n > A$ (respectivement, $u_n < A$).

Dans les deux cas la suite est divergente.

.

Opérations: Si $\lim_{n\to\infty} u_n = l_1$ et $\lim_{n\to\infty} v_n = l_2$ alors

- $\lim_{n\to\infty}(u_n + v_n) = l_1 + l_2$, $\lim_{n\to\infty} \lambda u_n = \lambda l_1$;
- $\lim_{n\to\infty}(u_n v_n) = l_1 l_2$, $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{l_1}{l_2}$ (ici on suppose que $l_2 \neq 0$);
- $\lim_{n\to\infty} \mid u_n \mid = \mid l_1 \mid$.

.

Suites équivalentes. On dit que (u_n) est équivalente à (v_n) quand $n \to \infty$, noté $u_n \sim v_n$, si $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ (ou, mieux, si $u_n = a_n v_n$ avec $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$).

Deux suites équivalentes sont de même nature (convergente ou divergente) et, dans le cas où elle existe, ont la même limite.

.

Une suite (u_n) est **bornée** si il existe $A \geq 0$ tel que $\mid u_n \mid \leq A$ pour $n \geq 0$.

Une suite (u_n) **réelle** est

croissante si $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout n;
décroissante si $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout n;
majorée si il existe un réel A tel que $u_n \leq A$ pour tout n;
minorée si il existe un réel A tel que $u_n \geq A$ pour tout n.

Lemme (Weierstrass). Toute suite réelle croissante et majorée est convergente. Toute suite réelle décroissante et minorée est convergente.

.

Comparaison. Soient deux suites réelles (u_n) et (v_n) convergentes telles que $u_n \leq v_n$ pour tout n, alors $\lim u_n \leq \lim v_n$.

.

Majoration. Si $\mid u_n - l \mid \leq v_n$ et $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$, alors $\lim_{n\to\infty} u_n = l$.

.

"Gendarmes": Soit $(u_n), (v_n), (w_n)$ trois suites réelles telles que
$u_n \leq v_n \leq w_n$ et $u_n \to l$, $w_n \to l$. Alors $v_n \to l$.

.

Composition avec une fonction continue.

1) Pour une fonction $f(x)$ on définit la notion de limite de f en a; on a $\lim f(x)_{x\to a} = l$ si et seulement si pour toute suite (x_n) (et $x_n \neq a$) telle que $\lim x_n = a$ on a $\lim f(x_n) = l$.

2) f est continue en a si $\lim f(x)_{x\to a} = f(a)$ donc si et seulement si pour toute suite (x_n) telle que $\lim x_n = a$ on a $\lim f(x_n) = f(a)$.

.

Séries numériques.

Définition. A partir d'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ on définit une autre suite $(s_n)_{n\geq 0}$ par

$$s_n = u_0 + ... + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

L'étude de la suite $(s_n)_{n\geq 0}$ est appelée l'étude de la **série** $\sum_0^\infty u_n$ (noteé aussi plus simplement $\sum u_n$).

On appelle s_n **somme partielle** de rang n de la série.

Remarque. La suite (s_n) détermine (u_n): $u_n = s_n - s_{n-1}$.

Définition. Si la suite des sommes partielles (s_n) est convergente avec $s = \lim s_n$, on dit que la série $\sum u_n$ est **convergente** et a pour somme s; on note $s = \sum_0^\infty u_n$.

Si la suite des sommes partielles (s_n) est divergente, on dit que la série $\sum u_n$ est **divergente.**

Remarque: la nature d'une série ne change pas lorsqu'on modifie un nombre fini de ses termes (mais sa somme dépend de tous ses termes).

.

Condition nécessaire de convergence. Si la série $\sum u_n$ converge, $\lim u_n = 0$.

Autrement dit, si $\lim u_n \neq 0$, la série diverge. On dit dans ce cas que la série $\sum u_n$ diverge *grossièrement.*

.

Exemples. 1) La série géométrique de raison a : la série $\sum a^n$ converge si et seulement si $\mid a \mid < 1$; dans ce cas $\sum_0^\infty a^n = \frac{1}{1-a}$.

2) La série de Riemann d'exposant $a \in \mathbf{R}$, $\sum \frac{1}{n^a}$ converge si et seulement si $a > 1$. En particulier, la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

3) La série de Bertrand $\sum \frac{1}{n(\ln n)^a}$ converge si et seulement si $a > 1$.

.

Opérations. Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes, la série $\sum(u_n + v_n)$ converge et $\sum_0^\infty (u_n + v_n) = \sum_0^\infty u_n + \sum_0^\infty v_n$.

Si la série $\sum u_n$ converge, la série $\sum \lambda u_n$ converge et $\sum_0^\infty \lambda u_n = \lambda \sum_0^\infty u_n$.

Séries à termes positifs. Soit $u_n \geq 0$ pour tout n. La suite de sommes partielles (s_n) est alors croissante. **Donc la série de termes positifs $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite (s_n) de ses sommes partielles est majorée.**

.

Règle de comparaison. Soit $0 \leq u_n \leq v_n$. Si la série $\sum v_n$ converge, la série $\sum u_n$ converge et on a pour les sommes $\sum_0^\infty u_n \leq \sum_0^\infty v_n$.

(Donc, si la série $\sum u_n$ diverge, la série $\sum v_n$ diverge aussi.)

.

Règle des équivalents. Soit deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ à **termes positifs**. Si $u_n \sim v_n$ lorsque $n \to \infty$, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

.

Lemme. Si la série $\sum \mid u_n \mid$ converge, la série $\sum u_n$ converge.

Définition. On dit que la série $\sum u_n$ converge **absolument** si la série $\sum \mid u_n \mid$ converge.

En particulier, si $\mid u_n \mid \leq v_n$ à partir d'un certain rang et la série $\sum v_n$ converge, la série $\sum u_n$ converge absolument.

.

Proposition. Si la série $\sum u_n$ converge absolument, toute série obtenue par une permutation quelconque des termes (u_n) converge absolument et a la même somme.

Par contre, pour une série convergente mais pas absolument (série "semi-convegente") on peut toujours trouver une permutation de ses termes qui donne une série divergente (ou une série convegente avec une autre somme).

.

Critère de D'Alembert *(comparaison avec la série géométrique)*. Soit $\sum u_n$ une série à termes non-nuls à partir d'un certain rang. On suppose que $L = \lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}$ existe. Alors

- Si $L < 1$ la série $\sum u_n$ converge (absolument)
- Si $L > 1$ la série $\sum u_n$ diverge (grossièrement)
- Si $L = 1$, cas douteux.

.

Critère de Cauchy *(comparaison avec la série géométrique).*

On suppose que $L = \lim_{n\to\infty} \mid u_n \mid^{1/n}$ existe. Alors

- Si $L < 1$ la série $\sum u_n$ converge (absolument)
- Si $L > 1$ la série $\sum u_n$ diverge (grossièrement)
- Si $L = 1$, cas douteux.

.

Séries alternées.

Une série $\sum u_n$ à termes réels est dite **alternée** si pour tout n, les termes u_{n+1} et u_n sont de signe contraire.

Proposition. Soit $\sum u_n$ une série alternée telle que $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ et la suite $(\mid u_n \mid)$ est décroissante. Alors la série $\sum u_n$ est convergente.

.

Comparaison avec les intégrales. Soit $f(x)$ une fonction **décroissante** définie pour $x \geq 0$ et telle que $f(x) \to 0$ quand $x \to \infty$.

On a l'encadrement

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \int_1^n f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

On en déduit que la série $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ converge si et seulement si l'intégrale $\int_1^{\infty} f(x)dx$ converge.

Exemple. Comparer la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^a}$ avec l'intégrale $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^a}dx$.