Equations différentielles linéaires aux coefficients constants.
Système de n équations d'ordre 1.

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}$$

où $\mathbf{x}(t) \in K^n$, $A \in M_n(K)$, $K =$ R ou C. Une solution est une fonction $\varphi : I \to K^n$ définie sur un intervalle I et vérifiant $\frac{d}{dt}\varphi(t) = A\varphi(t)$.

.

Théorème d'existence et d'unicité. Pour tout $v \in K^n$ il existe une solution unique $x(t)$ définie sur R à valeurs dans K^n vérifiant la condition initiale $x(0) = v$.

.

Propriétés générales.

1.1. Une combinaison linéaire des solutions est une solution (conséquence de la linéarité de l'équation).

1.2. Si $\varphi(t)$ est une solution et $c \in$ R, alors $\varphi(t + c)$ l'est aussi (conséquence du fait que A est à coefficients constants).

1.3. *Complexification.* Soit A une matrice *réelle* et $\mathbf{z}(t)$ une solution *complèxe*: $\mathbf{z}' = A\mathbf{z}$, ($\mathbf{z}(t) \in$ C^n). Alors la partie réelle $\mathbf{x}(t) = Re(\mathbf{z}(t))$ et la partie imaginaire $\mathbf{y}(t) = Im(\mathbf{z}(t))$ de la solution complèxe sont des solutions réelles.

Il est donc utile de chercher dès le début des solutions complèxes.

1.4. Chaque vecteur propre v de A, $Av = \lambda v$, engendre une solution "exponentielle": $\varphi(t) = e^{\lambda t}v$.

.

1.5. *Changement de base.* Par un changement linéaire des variables, $x = Py$, le système différentiel $x' = Ax$ est transformé en $y' = By$ avec $B = P^{-1}AP$. Pour simplifier le système on cherche à réduire la matrice A à une forme "simple".

.

On commence par calculer les valeurs propres de A en calculant le polynôme caractéristique et en déterminant ses racines.

Cas diagonalisable.

a) *Décomposition suivant les vecteurs propres.* Si A est diagonalisable, soit $(v_1, ..., v_n)$ une base de vecteurs propres, $Av_i = \lambda_i v_i$. On a alors n solutions de $x' = Ax$ linéairement indépendentes $e^{\lambda_1 t}, ..., e^{\lambda_n t}$ et toute autre solution sera leur combinaison linéaire. En effet, en décomposant une soultion $\varphi(t)$ suivant la base, $\varphi(t) = \sum_i c_i(t)v_i$, on a $\sum_i c_i'(t)v_i = \lambda_i c_i(t)v_i$, donc $c_i'(t) = \lambda_i c_i(t)$, d'où $c_i(t) = c_i(0)e^{\lambda_i t}$, $i = 1, ..., n$.

Donc $\varphi(t) = \sum_i c_i(0)e^{\lambda_i t}v_i$ et les constantes $c_i(0)$ sont déterminées par la condition initiale $\varphi(0) = \sum_i c_i(0)v_i$.

On en déduit que pour tout $u \in \mathrm{K}^n$ il existe une solution unique $x(t)$ définie sur R vérifiant la condition initiale $x(0) = u$.

.

b) *Diagonalisation.* Si A est diagonalisable, $B = P^{-1}AP = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, le système $y' = By$ est scindé: $y'_1 = \lambda_1 y_1$, ... , $y'_n = \lambda_1 y_n$. Toutes ses solutions sont donnés par $y_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}$, ... , $y_n(t) = c_n e^{\lambda_n t}$. Remarquons que $c_i = y_i(0)$. On en déduit que pour tout $c = (c_1, ..., c_n) \in \mathrm{K}^n$ il existe une solution unique $y(t)$ définie sur R vérifiant la condition initiale $y(0) = c$.

Donc pour tout $u \in \mathrm{K}^n$ il existe une solution unique $x(t) = Py(t)$ définie sur R vérifiant la condition initiale $x(0) = u$.

.

Une autre façon de calculer: projecteurs spectraux.

Soit $p_A(z) = \pm(z - \lambda_1)...(z - \lambda_n)$ avec les n racines λ_i distinctes. La décomposition du vecteur u suivant les vecteurs propres $v_1, ..., v_n$, $u = \sum_i c_i v_i$ peut se calculer en utilisant les *projecteurs spectraux* Π_i.

Soit $q_i(z) = (z - \lambda_1)...(z - \lambda_{i-1})(z - \lambda_{i+1})...(z - \lambda_k)$. On pose

$$\Pi_i = \frac{1}{q_i(\lambda_i)} q_i(A)$$

Alors $c_i v_i = \Pi_i(u)$ et la solution $\varphi(t) = \sum_i c_i(0)e^{\lambda_i t}v_i$ vérifiant $\varphi(0) = u$ est

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i t}\Pi_i u$$

1.6. Lemme. Soit B une matrice qui commute avec A: $AB = BA$. Soit $\varphi(t)$ une solution de $x' = Ax$. Alors $\psi(t) = B\varphi(t)$ est aussi une solution de $x' = Ax$.

.

Exponentielle d'une matrice.

.

En dérivant l'équation $x'(t) = Ax(t)$ on obtient
$x''(t) = A^2x(t)$ et par récurrence

$$\frac{d^k x(t)}{dt^k} = A^k x(t)$$

La série de Taylot de $x(t)$, $\sum_0^\infty \frac{t^n}{n!}x^{(n)}(0)$ s'écrit donc
$\sum_0^\infty \frac{t^n}{n!}A^n v$, où $v = x(0)$.

.

2.1. Proposition. Soit $A \in M_n(\mathrm{C})$ et $v \in C^n$. La série $\sum_0^\infty \frac{t^n}{n!} A^n v$ converge normalement sur tout intevalle fini de R. La somme de cette série $\varphi(t) = \sum_0^\infty \frac{t^n}{n!} A^n v$ est dérivable par rapport à t et $\frac{d}{dt}\varphi(t) = A\varphi(t)$.

.

En particulier, pour toute matrice A la série $\sum_0^\infty \frac{A^n}{n!}$ converge (absolument).

Définition. La somme de la série

$$e^A = \sum_0^\infty \frac{A^n}{n!}$$

s'appelle l'exponentielle de A.

.

Remarque: si $A = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, $e^A = diag(e^{\lambda_1}, ..., e^{\lambda_n})$.

.

2.2. Corollaire. La série (à coefficients matriciels) $\sum_0^\infty \frac{t^n}{n!} A^n$ converge normalement sur tout intervalle fini. Sa somme e^{tA} est dérivable par rapport à t et $\frac{d}{dt} e^{tA} = Ae^{tA}$.

.

2.3. Corollaire. Pour $v \in K^n$, $\varphi(t) = e^{tA} v$ est une solution de l'équation $x' = Ax$ vérifiant la condition initiale $\varphi(0) = v$.

.

Remarque. Les colonnes de e^{tA} sont les solutions du système $x' = Ax$ vérifiant les conditions initiales particulières: sa j-ème colonne ψ_j vérifie $\psi_j(0) = e_j$, le j-ème vecteur canonique.

.

2.4. Changement de base.

$$e^{P^{-1}AP} = P^{-1} e^A P$$

Cas diagonalisable. Si $P^{-1}AP = D = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, alors $P^{-1} e^A P = diag(e^{\lambda_1}, ..., e^{\lambda_n})$.

.

Utilisation des projecteurs spectraux. Si A est diagonalisable et $\Pi_1, ..., \Pi_n$ sont les projecteurs spectraux, on a

$$e^{t\mathcal{D}} = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} \Pi_i$$

2.5. Lemme. a) Soit $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ les valeurs propres de A. Alors $(e^{\lambda_1}, ..., e^{\lambda_n})$ sont les valeurs propres de e^A.

b) $\det(e^A) = e^{tr(A)}$.
(La démonstration est fait par la trigonalisation.)

.

2.6. Lemme. Si $AB = BA$, on a $e^{A+B} = e^A e^B$.
[En pârticulier, e^A est inversible et $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.]

.

Noter que $e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}$: la famille $\{e^{tA}\}$ est un "groupe à un paramètre". En particulier, e^{tA} est inversible et $(e^{tA})^{-1} = e^{-tA}$.

.

Exemple en dimension 2.
Soit le polynôme caractéristique $p_A(z) = z^2 + az + b$.
Cas des racines simples $\lambda \neq \mu$. Alors
$\Pi_\lambda = \frac{1}{\lambda-\mu}(A - \mu I)$ et $\Pi_\mu = \frac{1}{\mu-\lambda}(A - \lambda I)$. Ensuite
$e^{tA} = e^{\lambda t}\Pi_\lambda + e^{\mu t}\Pi_\mu = \frac{1}{\lambda-\mu}[(e^{\lambda t} - e^{\mu t})A - (\mu e^{\lambda t} - \lambda e^{\mu t})I$.

.

Cas particulier: $a = 0$, alors $\mu = -\lambda$ et on a
$e^{tA} = \frac{1}{2\lambda}(e^{\lambda t} - e^{-\lambda t})A + \frac{1}{2}(e^{\lambda t} + e^{-\lambda t})I$.
Oscillations harmoniques: si $a = 0$ et en plus $b > 0$, alors λ est imaginaire, $\lambda = i\omega$, et $e^{tA} = \frac{1}{\omega}\sin(\omega t)A + \cos(\omega t)I$.

.

Suites définies par une récurrence linéaire.

Récurrence d'ordre 1 à n composantes.

Soit $A \in M_d(K)$. On s'intéresse à des suites vectorielles (U_n), $n \geq 0$, à valeurs dans K^d vérifiant une récurrence linéaire:

$$U_{n+1} = AU_n (*)$$

Une solution de (*) est une suite vérifiant (*). En itérant, on a:

$$U_n = A^n U_0$$

d'où

Théorème d'existence et d'unicité. Pour tout vecteur $v \in K^d$ il existe une solution unique (U_n) vérifiant la condition initiale $U_0 = v$.

Pour calculer A^n on réduit A à une forme simple (diagonale...).

.

Propriétés générales.

1. L'ensemble des solutions (U_n) est un espace vectoriel de dimension d.

2. Si (U_n) est une solution, $c \in N$ et $V_n = U_{n+c}$, alors (V_n) est aussi une solution.

3. *Complexification.* Soit A une matrice *réelle* et (U_n) une solution *complèxe*; alors la partie réelle et la partie imaginaire de (U_n) sont des solutions réelles.

Il est donc utile de chercher dès le début des solutions complèxes.

4. Chaque vecteur propre v de A, $Av = \lambda v$, engendre une solution "exponentielle": $U_n = \lambda^n v$.

5. *Changement de base.* Par un changement linéaire des variables, $U = PV$, la récurrence $U_{n+1} = AU_n$ est transformé en $V_{n+1} = BV_n$ avec $B = P^{-1}AP$. On a $A = PBP^{-1}$ et $A^n = PB^nP^{-1}$.

.

Cas diagonalisable.

Si A est diagonalisable, une base de vecteurs propres $(v_1, ..., v_d)$ de A donne une base de solutions "exponentielles" $(\lambda_1^n v_1)$,..., $(\lambda_d^n v_d)$. pour une condition initiale v donnée, il suffit de décomposer v par rapport à la base $(v_1, ..., v_d)$: $v = \sum_i a_i v_i$ et la solution avec $U_0 = v$ sera $U_n = \sum_i a_i \lambda_i^n v_i$.

.

Une rédaction alternative. Soit P la matrice de passage vers une base de vecteurs propres, donc $A = PBP^{-1}$ avec B diagonale, $B = diag(\lambda_1, ..., \lambda_d)$. Alors $B^n = diag(\lambda_1^n, ..., \lambda_d^n)$ et $A^n = Pdiag(\lambda_1^n, ..., \lambda_d^n)P^{-1}$.

.

Utilisation des projecteurs spectraux. Soit A diagonalisable, $(\lambda_1, ..., \lambda_d)$ le spectre de A et Π_i le projecteur spectral associé à la valeur propre λ_i. Alors $A = \sum_i \lambda_i \Pi_i$ et on vérifie immédiatement que

$$A^n = \sum_i \lambda_i^n \Pi_i$$

Rappel: calcul de Π_i. Supposons que le polynôme mcaractéristique est à racines simples: $p_A() = \pm(z - \lambda_1)...(z - \lambda_d)$. .

Soit $q_i(z) = (z - \lambda_1)...(z - \lambda_{i-1})(z - \lambda_{i+1})...(z - \lambda_d)$.

Alors le projecteur spectral Π_i est donné par

$$\Pi_i = \frac{1}{q_i(\lambda_i)} q_i(A)$$

.

Exemple. Soit la dimension $d = 2$, et le polynôme caractéristique $p_A(x) = -(x - \lambda)(x - \mu)$.

Soit $\lambda \neq \mu$ (dans ce cas A est diagonalisable). Alors $\Pi_\lambda = \frac{1}{\lambda - \mu}(A - \mu I)$ et $\Pi_\mu = -\frac{1}{\lambda - \mu}(A - \lambda I)$.

Donc $A^n = \lambda^n \Pi_\lambda + \mu^n \Pi_\mu = \frac{\lambda^n}{\lambda - \mu}(A - \mu I) - \frac{\mu^n}{\lambda - \mu}(A - \lambda I) = \frac{\lambda^n - \mu^n}{\lambda - \mu} A + \frac{\lambda \mu^n - \mu \lambda^n}{\lambda - \mu} I$.