Déterminants.

1. Définition. Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice carrée d'ordre n.

Le **déterminant** est une application dét: $Mat_n(K) \to K$ défini par récurrence sur n de façon suivante:

- Si $n = 1$, $\det(a_{11}) = a_{11}$;

- pour $n > 1$, soit A_j la matrice (d'ordre $n-1$) obtenue en supprimant la première ligne et la $j-$ème colonne de A. Alors

.

$$\text{dét}(A) = a_{11}\text{dét}A_1 - a_{12}\text{dét}A_2 + ... + (-1)^{n+1}a_{1n}\text{dét}A_n$$
$$= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}detA_j$$

.

On dit qu'on développe le déterminant suivant la première ligne de A.

En particulier, si $n = 2$,

.

$$\text{dét}\begin{pmatrix} a_{11}, a_{12} \\ a_{21}, a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

.

Noter que le déterminant est un polynôme homogène de degré n en n^2 variables (a_{ij}) qui contient $n!$ monômes.

.

Critère d'inversibilité.

Théorème. La matrice $A \in Mat_n(K)$ est inversible si et seulement si dét$A \neq 0$.

.

Propriétés du déterminant.

1. Si une colonne (ou une ligne) de la matrice est nulle, le déterminant est nul.

2. Le déterminant d'une matrice **triangulaire** (supérieure ou inférieure) est égal au produit de ses éléments diagonaux.

3. Soit $C_1, ..., C_n$ les colonnes de la matrice A: $A = (C_1, ..., C_n)$. On peut considérer le déterminant comme une fonction de n variables vectorielles $(C_1, ..., C_n)$.

a. Le déterminant est une application linéaire par rapport à chaque colonne.

b. Si deux colonnes sont égales, le déterminant est nul.

c. Si l'on échange entre elles deux colonnes, le déterminant change de signe.

[On résume les propriétés a), b), c) en disant que le déterminant est une **forme n-linéaire alternée**.]

4. Corollaire. Le déterminant ne change pas si à une colonne on ajoute une combinaison linéaire des autres colonnes.

.

Calcul des déterminants. En utilisant ce corollaire (et en échageant les colonnes si nécessaire) on peut réduire la matrice à une forme triangulaire ("échelonnée" par rapport aux colonnes) exactement comme dans la méthode du pivot; cela permet de calculer le déterminant.

.

Déterminant de la matrice transposée

.

5. Pour toute matrice $A \in Mat_n(K)$ on a

$$det(^tA) = detA$$

.

6. Corollaire. Toutes les propriétés du déterminant relatives aux colonnes peuvent être affirmées pour les lignes.

.

7. Déterminant du produit des matrices. Pour toutes deux matrices $A, B \in Mat_n(K)$ on a

$$det(AB) = (detA)(detB)$$

8. Corollaire. Si $A \in Mat_n(K)$ est inversible on a
dét $(A^{-1}) = (\text{dét}A)^{-1}$.

9. Corollaire. Si A et A' sont deux matrices semblables, $A' = P^{-1}AP$, alors détA' =détA.

En particulier, le déterminant de la matrice associée à un endomorphisme ne dépend pas du choix de la base.

.

Déterminant d'un endomorphisme.

Définition. Soit f un endomorphisme de l'espace vectoriel E. On appelle **déterminant** de f le déterminant de la matrice qui représente f dans une base quelconque de E.

On note les propriétés suivantes:

1. det$f \neq 0$ si et seulement si f est inversible.

2. Si f et g sont des endomorphismes de E, on a dét$(f \circ g)$ =(détf)dét(g).

.

Développement suivant une ligne ou une colonne; cofacteurs.

Soit A_{ij} la matrice obtenue en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne de A.

Compte tenu du fait que l'on peut échanger les lignes entre elles (le déterminant change de signe), à partir du développement suivant la première ligne on a le développement du déterminant suivant la i-ème ligne. En passant à la matrice transposée on a le développement du déterminant suivant la j-ème colonne.

10. Théorème. **1.** Le développement du déterminant suivant la i-ème ligne:

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det A_{ij}$$

2. Le développement du déterminant suivant la j-ème colonne:

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det A_{ij}$$

17. Définition. On appelle **cofacteur** de l'élément a_{ij} le scalaire $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}\text{dét}A_{ij}$.

On a donc les développements:

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij}$$

Matrice inverse

.

11. Théorème. Soit $\Delta = (\Delta_{ij})$ la **comatrice** de A - la matrice constituée de cofacteurs de A. Alors $A({}^t\Delta) = {}^t\Delta A =$(dét$A$)$I$.

En particulier, si A est inversible (dét$A \neq 0$), on a

$$A^{-1} = \frac{1}{detA}{}^t\Delta$$

.

Systèmes d'équations linéaires.

Nous allons considérer un **système linéaire** de n équations à n inconnues à coefficients dans K:

.

$$\left(\begin{array}{c} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right)$$

.

En termes des matrices le système (S) s'écrit $AX = B$ en notant

$A = \begin{pmatrix} a_{11}.......a_{1n} \\ .... \\ a_{n1}.......a_{nn} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ .. \\ b_n \end{pmatrix}$.

Résoudre (S) c'est trouver tous les vecteurs $(x_1, ..., x_n)$ vérifiant (S).

.

12. Lemme. Les propriétés suivantes sont équivalentes:
(1) La matrice A est inversible.
(2) Pour tout B l'équation $AX = B$ admet une solution unique.
(3) Pour tout B l'équation $AX = B$ admet au moins une solution.
(4) L'équation homogène $AX = 0$ n'admet pas de solution non-nulle.

.

Si la matrice A est inversible ($\det(A) \neq 0$), le système est dit de **Cramer**: il possède une solution unique donnée par $X = A^{-1}B$.

(En pratique on utilise la méthode du pivot de Gauss; la résolution du système fournit aussi la matrice inverse A^{-1}.)

13. Formules de Cramer. Soit $C_1, ..., C_n$ les colonnes de A. Un système de Cramer $AX = B$ admet toujours une solution unique quel que soit le vecteur B; la solution est donnée par les formules de Cramer

$$x_j = \frac{det(C_1, ..., C_{j-1}, B, C_{j+1}, ...C_n)}{detA}$$

• •

.

Remarque. La formule de Cramer n'est rien d'autre que la formule pour les éléments de la matrice inverse: $(A^{-1})_{ji} = \frac{1}{detA}\Delta_{ij}$ En effet, l'élément $(A^{-1})_{ji}$ est la j-ème composante du vecteur $A^{-1}e_i$, donc égal à
$\frac{det(C_1,...,C_{j-1},e_i,C_{j+1},...C_n)}{detA} = \frac{1}{detA}\Delta_{ij}$.

.

14. Le calcul du déterminant peut se faire par la méthode du pivot. Si à la première étape d'élimination on rencontre un pivot qui n'est pas sur la diagonale, le déterminant est nul.

Sinon dans la matrice échélonnée tous les pivots sont sur la diagonale et le déterminant est leur produit **au signe près** (chaque échange des lignes change le signe du déterminant).

.

15. Matrice diagonale ou triangulaire par blocs.

Proposition. Le déterminant d'une matrice diagonale ou triangulaire par blocs est égal au produit des déterminants de ses blocs diagonaux.

.

16. Déterminant d'un système de vecteurs.

Soit $\dim E = n$ et soit $u_1, .., u_n$ une suite de n vecteurs de E. Soit $B = (e_1, ..., e_n)$ une base de E. Pour tout j, $j = 1, ..., n$, on écrit $u_j = a_{1j}e_1 + ... + a_{nj}e_n$. Soit $A = (a_{ij})$ la matrice dont les colonnes correspondent aux vecteurs $u_1, .., u_n$. On pose $\det_B(u_1, .., u_n)$ $=\det A$ et on l'appelle le **déterminant du système des vecteurs** $u_1, .., u_n$ dans la base B.

Changement de base. Soit B' une autre base de E et P la matrice de passage de la base B vers B'. Alors

$$det_B(u_1, .., u_n) = detP \cdot det_{B'}(u_1, .., u_n)$$

Les propriétés suivantes sont celles du déterminant d'une matrice:

1. $\det_B(u_1, .., u_n)$ est linéaire par rapport à chaque vecteur.

2. $\det_B(u_1, .., u_n)$ change de signe lorsque l'on permute deux vecteurs.

3. $\det_B(u_1, .., u_n) = 0$ si et seulement si la famille $(u_1, .., u_n)$ est liée.

4. $\det_B(u_1, .., u_n) \neq 0$ si et seulement si $(u_1, .., u_n)$ est une base de E.

.

Aire, volume et déterminant.

Soit E un espace vectoriel sur R de dimension n. On suppose connu le concept d'aire ($n = 2$) et de volume ($n \geq 3$) *invariant par translations.*

Soit $B = (e_1, ..., e_n)$ une base de E.

Proposition. a) Soit $n = 2$. On définit l'unité d'aire dans E en disant que l'aire du parallelogramme construit sur les vecteurs e_1, e_2 est 1. Alors pour tout deux vecteurs v_1, v_2 de E l'aire du parallelogramme construit sur ses vecteurs est $\mid det_B(v_1, v_2) \mid$ (ici $B = (e_1, e_2)$).

.

b) Soit $n = 3$. On définit l'unité de volume dans E en disant que l'aire du parallelotope construit sur les vecteurs e_1, e_2, e_3 est 1. Alors pour tout trois vecteurs v_1, v_2, v_3 de E le volume du parallelotope construit sur ses vecteurs est $\mid det_B(v_1, v_2, v_3) \mid$ (ici $B = (e_1, e_2, e_3)$).

.

c) Soit f un endomorphisme de E. Pour toute partie de E de volume (ou aire) fini on a

$volume(f(D)) =\mid detf \mid volume(D)$.

Donc $\mid detf \mid$ est le coefficient de changement du volume (aire) par l'application linéaire f.