Séries entières.

Définition.

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels ou complexes et $f_n : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ définie par $f_n(z) = a_n z^n$. La série de fonctions $\sum f_n$ (notée aussi $\sum_0^\infty a_n z^n$) est appelée une *série entière de la variable complexe* z. La somme de cette série est notée $s(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$.

Si on remplace z par une variable réelle x, on a une *série entière de la variable réelle* x: $\sum_0^\infty a_n x^n$.

Problème initial: déterminer sur quelle partie de $\mathbf{C}$ ou de $\mathbf{R}$ la série converge.

Il sera commode de considérer le symbole $+\infty$ comme un nouveau nombre vérifiant $x < +\infty$ pour tout réel x.

.

Définition. On définit $R = \sup\{r \geq 0 : \text{la suite } (a_n r^n) \text{ est bornée }\}$.

[Si pour tout $r > 0$ la suite $(a_n r^n)$ est bornée, $R = +\infty$.]

.

R est appelé le **rayon de convergence** de la série; il est caractérisé par la propriété suivante: si $r < R$ la suite $(a_n r^n)$ est bornée, si $r > R$ la suite $(a_n r^n)$ n'est pas bornée.

Remarque: Le rayon de convergence ne change pas si on modifie un nombre fini de coefficients de la série.

.

Proposition 1. 1) La série $\sum_0^\infty a_n z^n$ converge (absolument) pour tout z tel que $\mid z \mid< R$. Si $r_0 < R$, la série $\sum_0^\infty a_n z^n$ converge normalement dans le disque $\mid z \mid\leq r_0$.

2) La série $\sum_0^\infty a_n z^n$ diverge pour tout z tel que $\mid z \mid> R$.

Le disque $D = \{z \in \mathbf{C} :\mid z \mid< R\}$ est appelé le **disque de convergence** de la série; si $R = +\infty$, $D = \mathbf{C}$. Si $R \neq +\infty$, le cercle $\{z \in \mathbf{C} :\mid z \mid= R\}$ est appelé le **cercle de convergence** de la série.

.

Remarque. En général, on ne peut rien dire sur la convergence de la série sur le cercle de convergence.

.

Série entière de la variable réelle. Pour une série entière de variable réelle $\sum_0^\infty a_n x^n$ on a:

- la série converge (absolument) pour tout x tel que $\mid x \mid< R$;

- la série diverge pour tout x tel que $\mid x \mid> R$.

L'intervalle $I = \{x :\mid x \mid< R\}$ est appelé **l'intervalle de convergence** de la série; si $R = +\infty$, $I = \mathbf{R}$.

.

Proposition 1: comparaison des séries.

Soit R_A (respectivement, R_B) le rayon de convergence de la série $\sum_0^\infty a_n z^n$ (respectivement, $\sum_0^\infty b_n z^n$).

i) Soit $\mid a_n \mid \leq Cn^s \mid b_n \mid$ pour certaines constantes C et s. Alors $R_A \geq R_B$.

ii) Soit $Dn^{-r} \mid b_n \mid \leq \mid a_n \mid \leq Cn^s \mid b_n \mid$ pour certaines constantes C, D, r et s. Alors $R_A = R_B$.

.

Proposition 2. Règle de D'Alembert. Si $L = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ existe dans $[0, +\infty]$, alors $R = \frac{1}{L}$.

Règle de Cauchy. $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\mid a_n \mid}$ existe dans $[0, +\infty]$, alors $R = \frac{1}{L}$.

.

On a aussi une propriété plus générale:

Proposition 2'. Soit R_A (respectivement, R_B) le rayon de convergence de la série $\sum_0^\infty a_n z^n$ (respectivement, $\sum_0^\infty b_n z^n$).

Soit $\mid a_n = p_n \mid b_n \mid$. Alors

1) Si $L = \lim_{n\to\infty} \frac{|p_{n+1}|}{|p_n|}$ existe dans $[0, +\infty]$, alors $R_A = \frac{1}{L} R_B$.

2) Si $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\mid p_n \mid}$ existe dans $[0, +\infty]$, alors $R_A = \frac{1}{L} R_B$.

.

Proposition 3. Propriétés de la somme d'une série entière.

Soit une série entière $\sum_0^\infty a_n x^n$ et $s(x) = \sum_0^\infty a_n x^n$ sa somme définie dans l'intervalle de convergence $I = \{x : \mid x \mid < R\}$.

.

Dérivation. On peut dériver la série terme à terme: la série des dérivées $\sum_1^\infty n a_n x^{n-1}$ a aussi R pour rayon de convergence, s est dérivable sur I et $s'(x) = \sum_1^\infty n a_n x^{n-1}$.

.

Intégration. On peut intégrer la série terme à terme: la série des primitives $\sum_0^\infty \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ a aussi R pour rayon de convergence et $\int_0^x s(t)dt = \sum_0^\infty \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$.

.

Corollaire. La somme $s(x) = \sum_0^\infty a_n x^n$ est indéfiniment dérivable dans l'intervalle de convergence; on a $s^{(n)}(0) = n! a_n$, donc $a_n = s^{(n)}(0)/n!$.

.

Développement en série entière d'une fonction; série de Taylor.

Problème: Etant donne une fonction définie sur un intervalle
$I = \{x : \mid x \mid < a\}$, existe-t-il une série entière $\sum_0^\infty a_n x^n$ telle que
$f(x) = \sum_0^\infty a_n x^n$ pour tout $x \in I$?

Si oui, on dit que f est **développable en série entière** sur I et que la série $\sum_0^\infty a_n x^n$ est le développement de f en série entière.

On a vu que dans ce cas f est est indéfiniment dérivable sur I et $a_n = f^{(n)}(0)/n!$, donc $f(x) = \sum_0^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

La série $\sum_0^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ s'appelle la *série de Taylor* de f en $x = 0$.

Rappel: Formule de Taylor-Lagrange. Si f est indéfiniment dérivable sur I, pour tout $x \in I$ et tout n il existe θ, $0 < \theta < 1$ tel que

$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}$

.

Proposition 4. Soit f une fonction indéfiniment dérivable sur l'intervalle $I = \{x :\mid x \mid < a\}$. f est développable en série entière sur I si et seulement si pour tout $x \in I$ le reste de Taylor-Lagrange $\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}$ tend vers 0 quand $n \to \infty$. Si cette condition est réalisée, $f(x) = \sum_0^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

.

Exemples: $e^x = \sum_0^\infty \frac{x^n}{n!}$,
$\frac{1}{1-x} = \sum_0^\infty x^n$,
$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_0^\infty (n+1) x^n$, etc. (dérivation)
$\frac{1}{1+x} = \sum_0^\infty (-1)^n x^n$,
$\ln(1-x) = -\sum_1^\infty \frac{x^n}{n}$,
$\ln(1+x) = \sum_1^\infty (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$
$\sin x = \sum_0^\infty \frac{(-1)^p x^{2p+1}}{(2p+1)!}$,
$\cos x = \sum_0^\infty \frac{(-1)^p x^{2p}}{(2p)!}$,
$\arctan x = \sum_0^\infty \frac{(-1)^p x^{2p+1}}{2p+1}$,
$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_1^\infty \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} x^n$

.

Une équation différentielle.

.

Cherchons une solution de l'équation de Bessel ($c \geq 0$ un parametre):

$$x^2 u'' + x u' + (x^2 - c^2) u = 0$$

sous la forme d'une série entière: $u(x) = \sum a_n x^n$.

En mettant la série dans l'équation on a:

$$x^2 \sum_{n \geq 2} a_n n(n-1) x^{n-2} + x \sum_{n \geq 1} a_n x^{n-1} + (x^2 - c^2) \sum_{n \geq 0} a_n x^n = 0$$

En rassemlant les termes on a

$$\sum_{n\geq 0} a_n(n^2-c^2)x^n + \sum_{n\geq 0} a_n x^{n+2} = 0$$

Cela donne:
$a_0c^2 = 0$;
$a_1(1-c^2) = 0$;
$a_n(n^2-c^2) = -a_{n-2}$ si $n \geq 2$.

Conclusion: si c n'est pas un entier, la seule solution développable en série entière est nulle.

Si $c = k$ est un entier, alors $a_0 = ... = a_{k-1} = 0$; on choisit $a_k = \alpha$ arbitrairement et la récurrence

$$a_n = \frac{a_{n-2}}{c^2-n^2}$$

donne
$a_{k+2r} = [\Pi_{i=1}^{r}(k^2-(k+2i)^2)]^{-1}\alpha$,
tous les autres coefficients a_j sont nuls.