Université Claude Bernard, Lyon I
43, boulevard 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies
Spécialité Mathématiques
Math IV-analyse
Année 2015/2016

Série n°6 :
Séries de Fourier

Exercice I : Série de Fourier - étude d'un cas

On considère la fonction f de période 2π, définie par $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$ sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

1. Faire un dessin rapide de la fonction.
2. Montrer que f est partout égale à la somme de sa série de Fourier.
3. Déterminer sa série de Fourier en formulation complexe puis en formulation réelle.
4. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2}$ et de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}$.

Exercice II : Série de Fourier - étude d'un cas
Soit $\alpha \in]0,1[$ et f la fonction de période 2π, définie par $x \mapsto \cos(\alpha x)$ sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

1. Faire un dessin rapide de la fonction.
2. Montrer que f est partout égale à la somme de sa série de Fourier.
3. Déterminer sa série de Fourier en formulation complexe puis en formulation réelle.
4. Montrer que $\displaystyle\frac{\pi}{\alpha \sin(\alpha\pi)} = \frac{1}{\alpha^2} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2}$.

Exercice III : Série de Fourier - fonction 2-périodique
Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ paire, de période 2, et définie par $f(x) = 1$ si $x \in [0, 1/2[$ et $f(x) = -1$ si $x \in [1/2, 1]$. Lorsque c'est possible, exprimer $f(x)$ comme la somme d'une série de la forme $\sum (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x))$ avec $\omega \in \mathbb{R}$ et les a_n, b_n des cœfficients réels.

Exercice IV : Série de Fourier - Existence d'un coefficient

Existe-t-il une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $x \in [0, \pi]$, $\sin(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nx)$?

Exercice V : Existence d'un coefficient

Existe-t-il une suite réelle $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $x \in [0,\pi[$, $\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \sin(nx)$?

Exercice VI : Existence d'un coefficient

Existe-t-il une suite réelle $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $x \in [0,2\pi]$, $\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \cos(nx)$?

Exercice VII : Série de Fourier - étude d'un cas

Déterminer le développement en série de Fourier de la fonction f paire, 2π-périodique et définie par $f(x) = x$ sur $[0,\pi]$. En déduire les valeurs des séries $\sum \frac{1}{(2n+1)^2}$, $\sum \frac{1}{(2n+1)^4}$, $\sum \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^4}$.

Exercice VIII : Série de Fourier - étude d'un cas

Déterminer la série de Fourier de la fonction 2π-périodique définie sur l'intervalle $]-\pi,\pi]$ par $f(x) = e^x$. Etudier la convergence de cette série. Retrouver la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$ (voir exercice 1).