Espaces vectoriels

Fiche amendée par David Chataur et Arnaud Bodin.

1 Définition, sous-espaces

Exercice 1

Montrer que les ensembles ci-dessous sont des espaces vectoriels (sur $\mathbb{R}$) :

— $E_1 = \{f : [0,1] \to \mathbb{R}\}$: l'ensemble des fonctions à valeurs réelles définies sur l'intervalle $[0,1]$, muni de l'addition $f+g$ des fonctions et de la multiplication par un nombre réel $\lambda \cdot f$.

— $E_2 = \{(u_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\}$: l'ensemble des suites réelles muni de l'addition des suites définie par $(u_n)+(v_n) = (u_n+v_n)$ et de la multiplication par un nombre réel $\lambda \cdot (u_n) = (\lambda \times u_n)$.

— $E_3 = \{P \in \mathbb{R}[x] \mid \deg P \leqslant n\}$: l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n muni de l'addition $P+Q$ des polynômes et de la multiplication par un nombre réel $\lambda \cdot P$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006868]

Exercice 2

Déterminer lesquels des ensembles E_1, E_2, E_3 et E_4 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

$E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x-7y = z\}$

$E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2-z^2 = 0\}$

$E_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-z = x+y+z = 0\}$

$E_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z(x^2+y^2) = 0\}$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000886]

Exercice 3

1. Décrire les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}$; puis de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
2. Dans $\mathbb{R}^3$ donner un exemple de deux sous-espaces dont l'union n'est pas un sous-espace vectoriel.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006869]

Exercice 4

Parmi les ensembles suivants reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels.

$E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+a = 0 \text{ et } x+3az = 0\}$

$E_2 = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(1) = 0\}$

$E_3 = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(0) = 1\}$

$E_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+\alpha y+1 \geqslant 0\}$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000888]

Exercice 5

Soit E un espace vectoriel.

1. Soient F et G deux sous-espaces de E. Montrer que

$$F \cup G \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \iff F \subset G \text{ ou } G \subset F.$$

2. Soit H un troisième sous-espace vectoriel de E. Prouver que

$$G \subset F \Longrightarrow F \cap (G+H) = G + (F \cap H).$$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000893]

2 Systèmes de vecteurs

Exercice 6

1. Soient $v_1 = (2,1,4)$, $v_2 = (1,-1,2)$ et $v_3 = (3,3,6)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$, trouver trois réels non tous nuls α, β, γ tels que $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0$.
2. On considère deux plans vectoriels

$$P_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$$

$$P_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0\}$$

trouver un vecteur directeur de la droite $D = P_1 \cap P_2$ ainsi qu'une équation paramétrée.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006870]

Exercice 7

Soient dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs $v_1 = (1,2,3,4)$ et $v_2 = (1,-2,3,-4)$. Peut-on déterminer x et y pour que $(x,1,y,1) \in \mathrm{Vect}\{v_1, v_2\}$? Et pour que $(x,1,1,y) \in \mathrm{Vect}\{v_1, v_2\}$?

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000900]

Exercice 8

Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $v_1 = (2,3,-1)$ et $v_2 = (1,-1,-2)$ et F celui engendré par $w_1 = (3,7,0)$ et $w_2 = (5,0,-7)$. Montrer que E et F sont égaux.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000908]

Exercice 9

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^{\alpha x}$. Montrer que la famille $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ est libre.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000917]

3 Somme directe

Exercice 10

Par des considérations géométriques répondez aux questions suivantes :

1. Deux droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$ sont-elles supplémentaires ?
2. Deux plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$ sont-ils supplémentaires ?
3. A quelle condition un plan vectoriel et une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ sont-ils supplémentaires ?

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006871]

Exercice 11

On considère les vecteurs $v_1 = (1,0,0,1)$, $v_2 = (0,0,1,0)$, $v_3 = (0,1,0,0)$, $v_4 = (0,0,0,1)$, $v_5 = (0,1,0,1)$ dans $\mathbb{R}^4$.

1. $\mathrm{Vect}\{v_1, v_2\}$ et $\mathrm{Vect}\{v_3\}$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

2. $\text{Vect}\{v_1,v_2\}$ et $\text{Vect}\{v_4,v_5\}$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?
3. $\text{Vect}\{v_1,v_3,v_4\}$ et $\text{Vect}\{v_2,v_5\}$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?
4. $\text{Vect}\{v_1,v_4\}$ et $\text{Vect}\{v_3,v_5\}$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000920]

Exercice 12

Soient $v_1=(0,1,-2,1), v_2=(1,0,2,-1), v_3=(3,2,2,-1), v_4=(0,0,1,0)$ et $v_5=(0,0,0,1)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier votre réponse.

1. $\text{Vect}\{v_1,v_2,v_3\}=\text{Vect}\{(1,1,0,0),(-1,1,-4,2)\}$.
2. $(1,1,0,0)\in\text{Vect}\{v_1,v_2\}\cap\text{Vect}\{v_2,v_3,v_4\}$.
3. $\dim(\text{Vect}\{v_1,v_2\}\cap\text{Vect}\{v_2,v_3,v_4\})=1$ (c'est-à-dire c'est une droite vectorielle).
4. $\text{Vect}\{v_1,v_2\}+\text{Vect}\{v_2,v_3,v_4\}=\mathbb{R}^4$.
5. $\text{Vect}\{v_4,v_5\}$ est un sous-espace vectoriel supplémentaire de $\text{Vect}\{v_1,v_2,v_3\}$ dans $\mathbb{R}^4$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000919]

Exercice 13

Soit $E=\Delta^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace des fonctions dérivables et $F=\{f\in E\mid f(0)=f'(0)=0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et déterminer un supplémentaire de F dans E.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000923]

Exercice 14

Soit
$$E=\left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\mid(u_n)_n\text{ converge }\right\}.$$
Montrer que l'ensemble des suites constantes et l'ensemble des suites convergeant vers 0 sont des sous-espaces supplémentaires dans E.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000926]