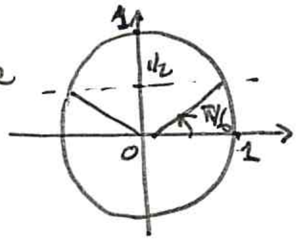
TD 1 : fonctions réciproques

Ex 1

1. On cherche les réels x tels que $\sin(x) = \frac{1}{2}$. Sur le cercle trigonométrique

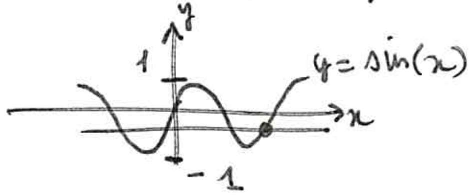


, on remarque que $x = \frac{\pi}{6}$ et $x = \frac{5\pi}{6}$ sont les seules solutions dans l'intervalle $[0, 2\pi]$. Comme la fonction sinus est 2π-périodique, on déduit finalement que

$$f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right) = \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi \,;\, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \,;\, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

2. On observe sur le cercle trigonométrique (ou sur le graphe de la fonction sinus) que f est surjective sur $[-1, 1]$, d'où

$$f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$$



Comme $-1 \leq \sin x \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(\mathbb{R}_+) = f^{-1}([0, 1])$

Sur le cercle trigonométrique, on observe que

$$f^{-1}([0, 1]) \cap [0, 2\pi] = [0, \pi]$$

Et donc, $f^{-1}(\mathbb{R}_+) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [2k\pi, (2k+1)\pi]$

3. Comme $-1 \leq \sin x \leq 1$, $f^{-1}(\{5\}) = \emptyset$.

Ex 2. • $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est bijective car $g : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto x^2 \end{cases}$ l'est et $f = g \circ g$.

• $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bijective : continue, str. croissante et de limites $-\infty$ et $+\infty$ en $-\infty$ et $+\infty$. On peut alors appliquer le théorème de la bijection

• pour les m̃ raisons $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bijective

• par le cours, $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ et $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ sont bijectives.

Ex 3 1. $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ n'est pas bijective car l'éq. $\exp(x) = 0$ n'a pas de solution $x \in \mathbb{R}$.

2. $1/\exp$ est continue, str. décroissante, de limite $+\infty$ et 0 en $-\infty$ et $+\infty$ respectivement. C'est donc une bijection par le th de la bijection.

3. $\cos|_{[0, \pi/2]} \geq 0$, donc n'est pas bijective sur $[-1, 1]$.

4. $\cos(0) = \cos(2\pi) = 1$. Or 0 et 2π appartiennent à $[0, \frac{5\pi}{2}]$ donc $\cos|_{[0, 5\pi/2]}$ n'est pas injective et donc pas bijective.

5. La racine carrée est positive ou nulle. f ne peut être surjective sur $\mathbb{R}$ et donc pas bijective.

6. f est bijective, cf. cours.

Ex 4 1. $e^x + 1 > 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En particulier, cette quantité est toujours non nulle. Comme elle est dérivable, $\frac{1}{e^x + 1}$ l'est aussi et f aussi. Alors, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 1 - \frac{e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{(e^x+1)^2 - e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{(X+1)^2 - X}{(X+1)^2},$$

où on a posé $X = e^x + 1 \in]1, +\infty[$.

Or $(X+1)^2 - X = X^2 + X + 1 > 0$ pour $X \in \mathbb{R}$, car son discriminant est str. négatif et le coef $(a=1)$ devant X^2 est str. positif.

Donc $f'(x) > 0$ pour $x \in \mathbb{R}$ et f est str croissante.

f est aussi continue et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Par le th de la bijection, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bijective.

2. On l'a vu, f' ne s'annule jamais. Donc f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$.

En $y = 1/2$, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution, notée $x = x_0$.

Alors, $$(f^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{f'(x_0)} = 1 - \frac{e^{x_0}}{(e^{x_0}+1)^2}$$
$$= 1 - \left(\frac{1}{e^{x_0}+1} - \frac{1}{(e^{x_0}+1)^2}\right)$$

Or, $$\frac{1}{2} = x_0 + \frac{1}{e^{x_0}+1}$$

D'où, $$(f^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \left[\left(\frac{1}{2} - x_0\right) - \left(\frac{1}{2} - x_0\right)^2\right]$$

$$= 1 - \left[\frac{1}{2} - x_0 - \left(\frac{1}{4} - x_0 + x_0^2\right)\right] = \frac{3}{4} - x_0^2$$

On remarque que $x = 0$ est solution de $f(x) = \frac{1}{2}$. Donc, $x_0 = 0$ et $(f^{-1})'(1/2) = 3/4$.

__Ex 5__ 1. appliquons le th de la bijection. f est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc continue et pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x + 4 = 2(x+2)$.

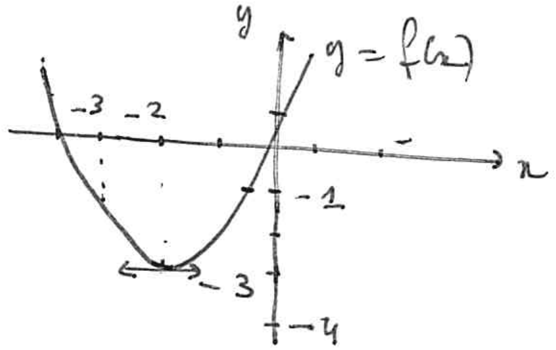
En particulier f est str. croissante sur $[-2, +\infty[$ et comme $f(2) = 4 - 8 + 1 = -3$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, f est ~~bi~~jective sur $[-3, +\infty[$.

Résolvons $x^2 + 4x + 1 = y$. Son discriminant réduit vaut $\Delta' = b'^2 - ac = 4 - (1-y) = 3 + y$. D'où, comme $x \geq -2$,
$$x = \left(-2 + \sqrt{3+y}\right)$$

Autrement dit, $f^{-1}(y) = -2 + \sqrt{3+y}$, pour $y \in [-3, +\infty[$

Soit encore, $f^{-1}(x) = -1 + \sqrt{3+x}$, pour $x \in [-3, +\infty[$.

2. $f(x) = (x+2)^2 - 3$



$f([-3,0]) = f([-2,0])$
$= [-3, 1]$

$$\begin{aligned} f(x) = -1 &\Leftrightarrow (x+2)^2 - 3 = -1 \\ &\Leftrightarrow (x+2)^2 = 2 \\ &\Leftrightarrow x = -2 \pm \sqrt{2} \end{aligned}$$ donc $f^{-1}(\{-1\}) = \{-2-\sqrt{2}, -2+\sqrt{2}\}$

Par le graphe de f, $f^{-1}(\{-4\}) = \emptyset$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \pm \sqrt{3}$

donc, à l'aide du graphe de f, $f^{-1}([0,1[) = [-2+\sqrt{3}, 0[$
$\cup]-4, -2-\sqrt{3}]$

3. On a vu que $\varphi(x) = f^{-1}(x) = \dfrac{-1+\sqrt{3+x}}{2}$, qui n'est pas dérivable en $x = -3$, car $\sqrt{\ }$ ne l'est pas en 0,

<u>Ex 6</u> Résolvons l'équation $\dfrac{1-x^2}{1+x^2} = y$ pour $y \in \mathbb{R}$ fixé

Posons $X = x^2$. Il vient

$$\begin{aligned} \frac{1-X}{1+X} = y &\Leftrightarrow 1 - X = y + Xy \\ &\Leftrightarrow 1 - y = (1+y)X \end{aligned}$$

Pour $y = -1$, cette équation n'a pas de solution.

Pour $y \neq -1$, l'équation est équivalente à

$$X = \frac{1-y}{1+y}$$

Comme $X = x^2 \in [0, +\infty[$, il nous faut étudier le signe de $\frac{1-y}{1+y}$

y		-1		1	
$1-y$	$+$		$+$	0	$-$
$1+y$	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{1-y}{1+y}$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$

Donc, l'équation $\frac{1-x^2}{1+x^2} = y$ admet pour unique solution $x \in \mathbb{R}_+$

$$x = \sqrt{X} = \sqrt{\frac{1-y}{1+y}} \quad \text{pour } y \in]-1, 1]$$

et aucune solution pour $y \notin]-1, 1]$. Autrement dit, f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $]-1, 1]$. et

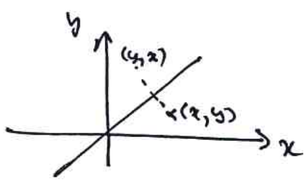
$$f^{-1} \left\{ \begin{array}{l}]-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \end{array} \right.$$

Ex 7 : soient D et D' deux telles droites. Si D n'est pas verticale, on peut trouver des coefficients a, b réels tels que D ait pour équation $y = ax + b$

D' étant symétrique de D par rapport à la droite d'équation $y = x$, on a

$(x, y) \in D'$

$\Rightarrow (y, x) \in D$



Les points de D' ont donc pour équation

$$x = ay + b$$

Si D n'est pas horizontale, $a \neq 0$

et donc D' a pour équation $y = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$: les pentes de D et D' sont inverses l'une de l'autre. En utilisant la convention que $0 = \frac{1}{\infty}$ et que les droites verticales ont une pente infinie, le résultat s'étend aux droites horizontales et verticales.

Ex8 : 1. Soit $y \in G$ et résolvons l'équation $\begin{cases} g \circ f(x) = y \\ x \in E \end{cases}$

Pour $x \in E$, $y \in G$, il y a équivalence entre

$$g(f(x)) = y \quad \text{et} \quad f(x) = g^{-1}(y) \quad \text{et} \quad x = f^{-1}(g^{-1}(y)) = f^{-1} \circ g^{-1}(y),$$

ce par définition de f^{-1} et g^{-1}.

Donc, $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ 2. non : $x + (-x) = 0$

Ex9 : Soit $y \in J$. Montrons que $-y \in J$ (alors J sera symétrique par rapport à 0).

Comme $J = f(I)$, il existe $x \in I$ tel que $y = f(x)$

Comme I est symétrique, $-x \in I$ et comme f est impaire,

$$-y = -f(x) = f(-x). \text{ Et donc } -y \in f(I) = J.$$

De plus, on a $f^{-1}(-y) = -x = -f^{-1}(y)$, donc f^{-1} est impaire.