4. Espaces vectoriels (bis)

Exercice 1 Dans chaque cas justifier si l'ensemble S est un sous-espace vectoriel de V :

1. $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $S = \{M \in V,\ \det(M) = 0\}$.
2. $V = \mathbb{R}^n$ et $S = \{x \in V,\ Ax = b\}$ où $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ et $b \neq 0 \in \mathbb{R}^m$.
3. $V = \mathbb{R}^2$ et $S = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a^2 \end{pmatrix},\ a \in \mathbb{R} \right\}$.
4. $V = \mathbb{R}[X]$ et $S = \{P(X) \in V,\ P(1) = 0\}$.

Exercice 2 Déterminer si l'élément v appartient au sous-espace vectoriel S donné :

1. $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $S = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$
2. $v = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $S = \left\langle \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1/3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Exercice 3 Déterminer si les vecteurs donnés de l'espace vectoriel V sont linéairement indépendants :

1. $V = \mathbb{R}^2$, $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$.
2. $V = \mathbb{R}_2[x]$, $v_1 = x + 1$, $v_2 = x + 2$, $v_3 = x^2 - 1$.
3. $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $v_1 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1/2 & -3 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 12 & -7 \\ 17 & 6 \end{pmatrix}$
4. $V = \mathbb{R}^3$, $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ i \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3+i \\ -2 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ 3i \\ -6+2i \end{pmatrix}$

Exercice 4

1. Soit $v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $\{v_1, v_2, v_3\}$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Trouver une base pour le noyau des matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ -4 & 2 & -6 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 4 & -7 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 5 Trouver une base pour le sous-espace vectoriel S de V lorsque

1. $V = \mathbb{R}_3[X]$ et $S = \langle 1 - X - 2X^3, 1 + X^3, 1 + X + 4X^3, X^2 \rangle$;
2. $V = \mathbb{R}^2$ et S est le sous-espace engendré par les colonnes de $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 9 \\ 4 & -5 & 36 \end{pmatrix}$;
3. $V = \mathbb{R}^3$ et S est le sous-espace engendré par les colonnes de $\begin{pmatrix} -1 & 6 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 13 & 3 & 15 \end{pmatrix}$;

4. $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $S = \left\langle \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Exercice 6 Trouver trois sous-espaces différents U, V et W de $\mathbb{R}^2$ tels que

$$\mathbb{R}^2 = U \oplus V = V \oplus W = W \oplus V.$$

Exercice 7 Soient U et W deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_{13}[X]$ tels que $\dim(U) = 7$ et $\dim(W) = 11$. Montrer que $\dim(U + W) \geq 4$. Donner un exemple où le minimum est atteint.

Exercice 8 Soit $V = \mathbb{R}_3[X]$ et les vecteurs

$$f_1 = 1 - 2X + X^3, \quad f_2 = X + X^2 - X^3,$$

$$g_1 = 2 + 2X - 4X^2 + X^3, \;\; g_2 = 1 - X + X^2, \;\; g_3 = 2 + 3X - X^2.$$

On considère les sous-espaces $U =< f_1, f_2 >$ et $W =< g_1, g_2, g_3 >$. Donner des bases de $U + V$ et $U \cap V$.