3. Espaces vectoriels

Exercice 1 Etudier la dépendance linéaire des vecteurs de $\mathbb{R}^2$ suivants :

a) $u = (2, -3)$, $v = (-1, 1)$; c) $u = (m + 1, -1)$, $v = (-3, m - 1)$ où $m \in \mathbb{R}$

b) $u = (-6, 2)$, $v = (9, -3)$.

Exercice 2 Les familles de $\mathbb{R}^3$ suivantes sont-elles libres ou liées ?

a) $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, 1, -1)$.

b) $u = (1, 0, -1)$, $v = (-1, 1, 0)$, $w = (0, -1, 1)$.

c) $u = (1, 1, 0)$, $v = (0, 1, 1)$, $w = (1, 0, 1)$, $z = (-1, 1, 1)$.

d) $u = (1, 1, 1)$, $v = (2, -1, 2)$, $w = (1, -2, -1)$.

e) $u = (10, -5, 15)$, $v = (-4, 2, -6)$.

Les familles de $\mathbb{R}^3$ données ci-dessus sont-elles génératrices de $\mathbb{R}^3$? Lorsque la réponse est négative, on déterminera le sous-espace engendré et sa nature géométrique.

Exercice 3

a) Décrire les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}$; puis de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

b) Dans $\mathbb{R}^3$ donner un exemple de deux sous-espaces dont l'union n'est pas un sous-espace vectoriel.

Exercice 4 Dans les cas suivants, indiquer si F est un sous-espace vectoriel de E :

1. $E = \mathbb{R}^2$, $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 0\}$.
2. $E = \mathbb{R}^2$, $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1\}$.
3. $E = \mathbb{R}^2$, $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$.
4. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$.
5. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$.
6. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 2x \text{ et } z = x\}$.

Exercice 5 On considère les sous-ensembles de $\mathbb{R}^4$ suivants :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x + y + z + t = 0\}$$
$$G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x + y = z + t\}$$
$$H = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \,:\, a = b = c = d\}\,.$$

a) Vérifier que ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$; donner une base et la dimension de chacun d'eux.

b) Quelle est la dimension de $F + G$?

c) Montrer que $\mathbb{R}^4 = F \oplus H$.

Licence L1-Math/Info – Algèbre II 2015-2016

Exercice 6 On considère les sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, y = z = 0\}$$
$$F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x + y = 0\}$$
$$F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x + z = y\}$$
$$F_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x = y\}\,.$$

a) Vérifier que ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$; donner une base et la dimension de chacun d'eux.

b) Déterminer $F_2 + F_3$.

c) Déterminer $F_2 \cap F_3$ et sa dimension. Que peut-on en déduire pour F_2 et F_3 ?

d) Montrer que F_1 et F_2 sont supplémentaires.

e) Montrer que F_1 et F_4 sont supplémentaires.

f) Quelle remarque peut-on faire en considérant les questions d) et e) ?

g) Indiquer la nature géométrique de chaque F_i.

Exercice 7 On considère les vecteurs $u = (4, -2, 0)$, $v = (3, 0, 3)$, $w = (1, 0, 1)$, $z = (-2, 1, 0)$ dans $\mathbb{R}^3$. La famille $\mathcal{F} = (u, v, w, z)$ est-elle libre ou liée ? Calculer $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Vect}(u, v, w, z)$.

Exercice 8 Soient dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs $v_1 = (1, 2, 3, 4)$ et $v_2 = (1, -2, 3, -4)$. Peut-on déterminer x et y dans $\mathbb{R}$ pour que $(x, 1, y, 1) \in \mathrm{Vect}\{v_1, v_2\}$? Et pour que $(x, 1, 1, y) \in \mathrm{Vect}\{v_1, v_2\}$?

Exercice 9 Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $u_1 = (2, -3, 1)$ et $u_2 = (2, -2, 1)$.

a) Quelle est la dimension de F ?

b) Démontrer que le vecteur $u = (0, 1, 0)$ est élément de F, mais que $v = (0, 0, 1)$ ne l'est pas.

c) Calculer les composantes du vecteur $w = (0, 4, 0) \in F$ dans la base (u_1, u_2).

d) Exprimer qu'un vecteur $v = (x, y, z)$ appartient F par une équation en x, y, z.

f) Indiquer la nature géométrique de F.

Exercice 10 Soit $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x + y = 0 \text{ et } z = 2t\}$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et déterminer une base de E. Compléter cette base en une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 11

a) Quelle est la dimension de $\mathbb{C}^2$ vu comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$? Donner une base.

b) Montrer que les vecteur suivants de $\mathbb{C}^3$

$$v_1 = (1 + i, 1 + 2i, i),\ v_2 = (2, 4 - i, -1),\ v_3 = (0, -1 + 2i, 2 + i)$$

sont liés si $\mathbb{C}^3$ est consideré comme espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, et sont libres si $\mathbb{C}^3$ est consideré comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12 Pourquoi les polynômes 1, X, $X(X - 1)$, $X(X - 1)(X - 2)$ forment-ils une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes à coefficients complexes de degré au plus 3 ? Exprimer X^2 et X^3 dans cette base.

Exercice 13 Soit $E := \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P = \lambda + (2\lambda - 3\mu)X + \mu X^2,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.
Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$ (espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré ≤ 2) et en donner une base.

Exercice 14 Soit n un entier superieur ou égal à 2.

1. L'ensemble des matrices inversibles de $M_n(K)$ est-il un sous-espace vectoriel de $M_n(K)$?
2. Montrer que l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de $M_n(K)$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(K)$.
3. Pour $n = 3$ donner un ensemble fini de matrices de $M_3(K)$ qui engendrent ce sous-espace vectoriel.
4. Donner un supplémentaire dans $M_3(K)$ de ce sous-espace vectoriel.

Licence L1-Math/Info – Algèbre II 2015-2016

Exercices à préparer pour les contrôles.

Exercice 15 On considère les ensembles

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x + z = -y\} \quad \text{et} \quad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x + y = 1\}.$$

Pour chacun, indiquer s'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ ou non. Dans le cas où il s'agit d'un espace vectoriel donner une base et la dimension.

Exercice 16 Soient F et G les deux sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ suivants :

$$\begin{aligned} F &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y = z = 0\}, \\ G &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2y - t = z = 0\}. \end{aligned}$$

a) Donner une base de F, G, et $F + G$.
b) Enoncer la formule de Grassmann et en déduire $\dim(F \cap G)$.
c) Déterminer une base de $F \cap G$.

Exercice 17 On considère la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivante :

$$\mathcal{F} = \{v_1 = (0, 1, -1), v_2 = (0, 1, 0), v_3 = (0, 2, -1), v_4 = (0, 0, 1)\}.$$

a) On pose $V = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(\mathcal{F})$. Extraire de $\mathcal{F}$ une base de V.
b) En déduire $\dim_{\mathbb{R}}(V)$.
c) Exprimer qu'un vecteur (x, y, z) appartient à V par une equation en x, y, z.
d) En déduire du point c) ou montrer directement que le vecteur $w_1 = (2, -1, 1) \notin V$.

Exercice 18 Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les deux sous-espaces vectoriels suivants :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\},$$

$$G = \text{Vect}\{(1, 0, 1), (0, 0, 1), (0, 0, 4)\}.$$

a) Déterminer une base de F et une base de G.
b) Montrer que $F + G = \mathbb{R}^3$.
c) La somme $F + G$ est-elle directe ? Motiver votre réponse.