2. Calcul Matriciel

Exercice 1 On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $E = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Quels sont les produits de deux matrices parmi ces 5 matrices qui ont un sens ? Calculer ces produits.

Exercice 2 Soient S et T deux matrices de $M_2(\mathbb{R})$ définies par

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer S^2, T^2, ST, TS, STS et TST.

Exercice 3 Soient A et B deux matrices de $M_2(\mathbb{R})$.

1. Montrer que la formule
$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + b^2$$
est fausse. Sous quelle condition cette formule est vraie ?
2. On considère les matrices $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Écrire la matrice C en fonction de B et la matrice identité I_3. Calculer C^4.

Exercice 4 Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que $A^2 = 5A - 4I_3$.
2. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 5 Calculer le rang des matrices suivantes et leurs inverses si elles sont inversibles.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} i & i-4 & 3-i \\ -i & 3-i & i-2 \\ 1-i & 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6 Résoudre les systèmes suivants :

$$(S_1) \begin{cases} x + 2y - 4z = -4, \\ 2x + 5y - 9z = -10, \\ 3x - 2y + 3z = 11. \end{cases} \qquad (S_2) \begin{cases} x + y - z = 8, \\ x + 2y - 3z = 5, \\ 3x + 2y - z = 2. \end{cases} \qquad (S_3) \begin{cases} x + 2y - 3z + 2t = 2, \\ 2x + 5y - 8z + 6t = 5, \\ 3x + 4y - 5z + 2t = 4. \end{cases}$$

Exercice 7 Soit m un nombre réel.

1. Calculer le rang de la matrice $\begin{pmatrix} m & m & -1 \\ m & 1 & -m \\ 1 & m & -m \end{pmatrix}$ en fonction de la valeur de m.
2. Selon les valeurs du paramètre m, résoudre le système suivant :

$$(S_m) \begin{cases} mx + my - z = 0, \\ mx + y - mz = 0, \\ x + my - mz = 0. \end{cases}$$

Exercice 8 Suivant la valeur des nombres réels a, b, c et d, résoudre le système suivant :

$$(S) \begin{cases} x - y - z = a, \\ 2x + y - z = b, \\ x + y - 3z = c, \\ 2x - y - z = d. \end{cases}$$

Exercice 9 On se propose de déterminer trois suites de nombres réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par les premiers trois termes a_0, b_0, c_0 et les relations de récurrences suivantes pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n - 2b_n + 2c_n \\ b_{n+1} = -a_n + b_n + c_n \\ c_{n+1} = -a_n - 2b_n + 4c_n \end{cases} .$$

1. Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.
   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.
2. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. En utilisant des opérations élémentaires, vérifier que P est inversible et calculer son inverse P^{-1}.
3. Soit $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer que $A = PDP^{-1}$.
4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
5. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
6. En déduire les expressions respectives des termes a_n, b_n, c_n en fonction de a_0, b_0, c_0 et n pour tout entier naturel n.

Exercices à préparer pour les contrôles.

Exercice 1 Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $A^2 \neq 0$ et $A^3 = 0$.
2. Exprimer B en fonction de A et de la matrice unité I_3.
3. Calculer B^5.
4. La matrice B est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse.

Exercice 2 1. Calculer le rang de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + y + z + w = 4, \\ 2x + y + 3z + 2w = 8, \\ 3x + 4y + 2z + 3w = 12. \end{cases}$$

Exercice 3 Soit m un nombre réel.

1. Calculer le rang de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & m-1 \\ 1+m & -1 & 2 \\ 2 & -m & 3 \end{pmatrix}$ en fonction de la valeur de m.
2. Selon les valeurs du paramètre m, résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + y + (m-1)z = m+2, \\ (1+m)x - y + 2z = 0, \\ 2x - my + 3z = m+2. \end{cases}$$