1. Polynômes et fractions rationnelles

Exercice 1 Déterminer les racines complexes des polynômes à coefficients réels suivants :

1. $X^2 + 3X - 1$
2. $2X^2 - X + 1$,
3. $X^3 + X^2 - 3X + 1$,
4. $X^4 - 8X^2 + 10$,
5. $X^4 + 6X^2 + 25$,
6. $X^6 - 4$

En déduire les factorisations de ces polynômes en polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 2

1. Soit $P = X^2 + aX + b$ un polynôme de degré 2 dans $\mathbb{R}[X]$. Expliquer le lien entre les coefficients a, b et les racines complexes α et β.
2. Soit $P = X^3 + aX^2 + bX + c$ un polynôme de degré 3 dans $\mathbb{R}[X]$. Expliquer le lien entre les coefficients a, b et c et les racines complexes α, β et γ.

Exercice 3 Soit $P = X^4 - 3X^3 + 2X^2 - 4X + 8 \in \mathbb{R}[X]$.

1. Vérifier que 2 est racine double de P.
2. En déduire une factorisation de P en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 4 Effectuer les divisions euclidiennes dans $\mathbb{R}[X]$ de

1. $3X^5 + 4X^2 + 1$ par $X^2 + 2X + 3$
2. $3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1$ par $X^3 + X + 2$
3. $X^4 - X^3 + X - 2$ par $X^2 - 2X + 4$

Exercice 5 Soient a, b des réels, et $P = X^4 + X^3 + aX^2 + bX + 1 \in \mathbb{R}[X]$.

1. Déterminer a et b pour que -1 soit racine double de P.
2. Calculer la formule de Taylor pour P en -1.
3. Calculer la formule de Taylor pour P en 1.

Exercice 6 Soit $P = X^4 + X^3 - 4X^2 + X + 1 \in \mathbb{R}[X]$.

1. Calculer P' et vérifier que 1 est racine double de P.
2. Écrire la formule de Taylor pour P en 1.
3. Calculer le quotient de P par $(X - 1)^2$.
4. Factoriser P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 7 Décomposer les fractions rationnelle suivantes en éléments simples sur $\mathbb{R}[X]$:

$$A(X) = \frac{X+3}{X(X-1)(X+1)}, \quad B(X) = \frac{X^5 - X^3 + X + 1}{(X+1)(X-2)}, \quad C(X) = \frac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2},$$

$$D(X) = \frac{2X}{X^2+X+1}, \quad E(X) = \frac{X^2+X+1}{(X-1)^2(X+1)^2}, \quad F(X) = \frac{X^4+1}{(X-1)^2(X^2+1)},$$

$$G(X) = \frac{1}{X^4-1}, \quad H(X) = \frac{16807}{(X-1)^3(X^2+2X+4)}, \quad I(X) = \frac{X^3+1}{(X^2+1)(X^2+X+1)},$$

$$K(X) = \frac{2X^3+1}{X^3-2X^2-X+2}, \quad L(X) = \frac{X^3+2X^2+3X+4}{(X-1)^4}$$

Exercice 8 En décomposant en éléments simples la fraction rationnelle $F(X) = \frac{1}{X(X+1)}$ calculer

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

Exercices à préparer pour les contrôles.

Exercice 9 Soit $P = X^3 - 2X^2 + X + 1 \in \mathbb{R}[X]$.

1. Donner la formule de Taylor pour P en 2.
2. En déduire la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ de la fraction rationnelle $\frac{X^3-2X^2+X+1}{(X-2)^3}$.

Exercice 10 Soient α un réel et $P = X^6 + 4X^5 + 8X^4 + 10X^3 + \alpha X^2 + 4X + 1 \in \mathbb{R}[X]$. On suppose que -1 est une racine de P.

1. Déterminer α.
2. Montrer que -1 est une racine double de P.
3. Montrer que $j = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ est une racine multiple de P.
4. Factoriser P en produit de facteurs irréductibles, d'abord dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 11 Soit $P = X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 2X + 2 \in \mathbb{R}[X]$.

1. Vérifier que i est une racine complexe de P.
2. Déterminer l'ensemble des racines complexes de P.
3. Factoriser P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
4. Donner la forme de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ de $\dfrac{X^2}{X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 2X + 2}$ et la décomposer.

Exercice 12 Donner la forme de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ des fractions rationnelles suivantes et les décomposer.

$$\frac{X^3 - 3X^2 + X - 4}{X - 1}, \quad \frac{2X^3 + X^2 - X + 1}{X^2 - 3X + 2}, \quad \frac{2X^3 + X^2 - X + 1}{X^2 - 2X + 1} \quad \text{et} \quad \frac{X^3 + 1}{(X+1)(X^2 + X + 1)}.$$