Résumé de Cours 9

Changement de bases Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, e.g., $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ etc.

$1^{\text{ère}}$ étape Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soit $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n\}$, $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \cdots, \mathbf{e}'_n\}$ deux bases de E. Puisque $\mathcal{B}$ est une base de E, pour tout $1 \leq j \leq n$, il existe un unique n-plet $(p_{1,j}, \cdots, p_{n,j}) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$\mathbf{e}'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{i,j}\mathbf{e}_i \qquad \text{(attention aux indices !)}.$$

Alors, pour $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i\mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^n x'_j\mathbf{e}'_j \in E$, on a

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} x'_j\mathbf{e}'_j = \sum_{j=1} x'_j\left(\sum_{i=1}^{n} p_{i,j}\mathbf{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} p_{i,j}x'_j\right)\mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{e}_i.$$

Posons $X = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\mathbf{x})$ et $X' = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(\mathbf{x})$, on en conclut que

$$X = PX' \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\mathbf{x}) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E)\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(\mathbf{x}).$$

La matrice $P = (p_{i,j}) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E)$ s'appelle la **matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.**
Notons que cette matrice est inversible avec son inverse $P^{-1} = \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_E)$.

$2^{\text{ème}}$ étape Soit E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies et $f : E \to F$ une application linéaire. Soit $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ des bases de E et soit $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ des bases de F. On pose $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ et $B = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f)$. Notons les matrices de passages de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ pr P et $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}'$ par Q.

`Trouver le liens entre les matrices` A `et` B `!` Pour $\mathbf{x} \in E$, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{mat}_{\mathcal{C}'}(f(\mathbf{x})) =& \mathrm{mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}(\mathrm{id}_F)\mathrm{mat}_{\mathcal{C}}(f(\mathbf{x})) = \mathrm{mat}_{\mathcal{C}',\mathcal{C}}(\mathrm{id}_F)^{-1}\mathrm{mat}_{\mathcal{C}}(f(\mathbf{x}))\\
=& \mathrm{mat}_{\mathcal{C}',\mathcal{C}}(\mathrm{id}_F)^{-1}\mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\mathbf{x})\\
=& \mathrm{mat}_{\mathcal{C}',\mathcal{C}}(\mathrm{id}_F)^{-1}\mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\mathrm{mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E)\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(\mathbf{x})\\
=& \mathrm{mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f)\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(\mathbf{x}),
\end{aligned}$$

on en déduit que

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f) = \mathrm{mat}_{\mathcal{C}',\mathcal{C}}(\mathrm{id}_F)^{-1}\mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\mathrm{mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E) \qquad \Longleftrightarrow \qquad B = Q^{-1}AP.$$

Remarque Soit $\mathbf{x} \in E$. Posons $X = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\mathbf{x}), X' = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(\mathbf{x})$ et $Y = \mathrm{mat}_{\mathcal{C}}(f(\mathbf{x})), Y' = \mathrm{mat}_{\mathcal{C}'}(f(\mathbf{x}))$. Alors, on a

$$Y = AX, \qquad Y' = BX', \qquad X = PX', \qquad Y = QY',$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned}
Y =& AX = APX'\\
=& QY' = QBX',
\end{aligned}$$

d'où $AP = QB$, i.e., $B = Q^{-1}AP$. □

Application Soit E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies et soit $f : E \to F$ une application linéaire. Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ des bases de E et F, respectivement. Posons $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$. Alors, on a

$$\text{le rang de l'application linéaire } f \quad = \quad \text{le rang de la matrice } A.$$

Pivot de Gauss (encore)

Définissons les matrices carrées $P_{i,j}^{(m)}$ $(1 \leq i < j \leq m), D_i(t)$ $(1 \leq i \leq m)$ et $E_{i,j}(t)$ $(1 \leq i \neq j \leq m)$ de taille m par

$$\begin{aligned} P_{i,j}^{(m)} &= I_m - (E_{i,i} + E_{j,j}) + E_{i,j} + E_{j,i}, \\ D_i^{(m)}(s) &= (I_m - E_{i,i}) + sE_{i,i}, \\ E_{i,j}^{(m)}(t) &= I_m + tE_{i,j}, \end{aligned}$$

où $E_{k,l} \in M_m(\mathbb{K})$ est la matrice dont la p-ème ligne et la q-ème colonne est $\delta_{k,p}\delta_{l,q}$. On peut vérifier les formules suivantes :

$$(P_{i,j}^{(m)})^2 = I_m, \qquad D_i^{(m)}(s_1)D_i^{(m)}(s_2) = D_i^{(m)}(s_1 s_2), \qquad E_{i,j}^{(m)}(t_1)E_{i,j}^{(m)}(t_2) = E_{i,j}^{(m)}(t_1 + t_2).$$

En particulier, on en dénduit que les matrices $P_{i,j}^{(m)}, D_i^{(m)}(s)$ $(s \in \mathbb{K}^*), E_{i,j}^{(m)}(t)$ $(t \in \mathbb{K})$ sont inversibles.

À l'aide de ces matrices, par calcul direct, on a

1. la permutation de la i-ème ligne et la j-ème ligne
   $=$ la multiplication de $P_{i,j}^{(m)}$ à `gauche`,
2. la multiplication par un scalaire s non null sur la i-ème ligne
   $=$ la multiplication de $D_i^{(m)}(s)$ à `gauche`,
3. l'addition de $t \times$ (la j-ème ligne) sur la i-ème ligne
   $=$ la multiplication de $E_{i,j}^{(m)}(t)$ à `gauche`.

<u>**Conclusion**</u> Le pivot de Gauss sur **lignes**
$=$ Multiplications des matrices $P_{i,j}^{(m)}, D_i^{(m)}(s)$ $(s \in \mathbb{K}^*), E_{i,j}^{(m)}(t)$ $(t \in \mathbb{K})$ à `gauche` $\square$

Ici, une question naturelle se pose :

`que se passe-t-il lorsque l'on multiplie ces matrices à droite ?`

En effet, sur une matrice de taille (m, n), par calcul direct, on a

(C1) la multiplication de $P_{i,j}^{(n)}$ à `droite`
$=$ la permutation de la i-ème colonne avec la j-ème colonne $(1 \leq i < j \leq m)$,

(C2) la multiplication de $D_i^{(n)}(s)$ à `droite`
$=$ la multiplication par la constante s sur la i-ème colonne $(1 \leq i \leq m)$,

(C3) la multiplication de $E_{i,j}^{(n)}(t)$ à `droite`
$=$ l'addition de $t\times$ (la i-ème colonne) sur la j-ème colonne $(1 \leq i \neq j \leq m)$.

<u>**Conclusion**</u> Le pivot de Gauss sur **colonnes**
$=$ Multiplications des matrices $P_{i,j}^{(m)}, D_i^{(m)}(s)$ $(s \in \mathbb{K}^*), E_{i,j}^{(m)}(t)$ $(t \in \mathbb{K})$ à `droite` $\square$