Résumé de Cours 6

Matrices Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, par exemple, $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ etc..

Soit $m, n \in \mathbb{N}^*$. Un tableau

$$A = (a_{ij})_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad a_{ij} \in \mathbb{K} \; (1 \le i \le m, \, 1 \le j \le n)$$

est dite une **matrice de taille** (m, n) **dans** $\mathbb{K}$.
Lorsque $m = n$, on dit que A est une **matrice carrée de taille** (ou **de degré**) n **dans** $\mathbb{K}$.
a_{ij} est dit le **coefficient de la i-ème ligne, j-ème colonne**.

Notons

$$M_{m,n}(\mathbb{K}) := \{A = (a_{ij})_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n} | a_{i,j} \in \mathbb{K}\}, \qquad M_n(\mathbb{K}) := M_{n,n}(\mathbb{K}).$$

Opérations sur $M_{m,n}(\mathbb{K})$

Soit $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_{m,n}(K)$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

On définit la **somme** de deux matrices A et B par

$$A + B := (a_{ij} + b_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{K}),$$

et la **multiplication par un scalaire** par

$$\lambda A := (\lambda a_{ij}) \in M_{m,n}(K).$$

Lemme $M_{m,n}(\mathbb{K})$ est muni d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel. $\square$

Soit $p, q, r \in \mathbb{N}^*$. Pour $A = (a_{ij}) \in M_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{kl}) \in M_{q,r}(\mathbb{K})$, on dfinit le **produit** AB des matrices A et B par la matrice de taille (p, r) dont le coefficient de la i-ème ligne, j-ème colonne est

$$(AB)_{ij} := \sum_{k=1}^{q} a_{ik} b_{kj}.$$

Lemme $M_n(\mathbb{K})$ est muni d'une structure d'anneau unitaire, et non-commutatif pour $n > 1$. $\square$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. La matrice A est dite **inversible** s'il existe une unique matrice $B \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$. La matrice B est dite l'**inverse** de A.

Remarque Notons $B = (b_1, \cdots, b_n)$, où $b_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$, le produit AB s'écrit dans la forme

$$AB = A(b_1, \cdots, b_n) = (Ab_1, \cdots, Ab_n).$$

Donc, trouver la matrice B satisfaisant $AB = I_n$ équivaut à résoudre les systèmes d'équations linéaires :

$$Ab_j = (\delta_{i,j})_{1 \le i \le n} \qquad (1 \le j \le n).$$

$\boxed{\textbf{Pivot de Gauss}}$ Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, par exemple, $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ etc..

Soit $m, n \in \mathbb{N}^*$ et soit $A = (a_{i,j}) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. Pour

1. `résoudre un système d'équations linéaires` $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ où $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ avec $x_1, \cdots, x_n$ inconnus et $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ avec les scalaires $b_1, \cdots, b_m \in \mathbb{K}$, ou
2. $m = n$ `et calculer l'inverse de la matrice` A,

on applique 3 type d'`opérations sur lignes` aux matrices

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{pmatrix} \in M_{m,n+1}(\mathbb{K}) \quad \text{pour 1.} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} A & I_m \end{pmatrix} \in M_{m,2m}(\mathbb{K}) \quad \text{pour 2.},$$

définies suivantes :

(L1) permuter la i-ème ligne et la j-ème ligne $(1 \leq i \neq j \leq m)$,

(L2) multiplier par une costante non null $s \in \mathbb{K}^*$ sur la i-ème ligne $(1 \leq i \leq m)$,

(L3) ajouter $t\times$ (la j-ème ligne) avec $t \in \mathbb{K}$ sur la i-ème ligne $(1 \leq i \neq j \leq m)$.

Cette méthode s'appelle le **pivot de Gauss** sur lignes.

Comment calculer l'inverse d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$?

Appliquer le **pivot de Gauss** à
la matrice $(A|I_n)$ de taille $(n, 2n)$ et transformer sous forme $(I_n|A')$
si on peut. Alors, la matrice A' on obtient sera A^{-1}.