Résumé de Cours 4

Opŕations sur les sous-espaces vectoriels Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Lemme Soit F, F' sous-espaces vectoriels de E. Alors, l'intersection $F \cap F'$ l'est aussi. $\square$

Attention Soit F, F' sous-espace vectoriels de E. La réunion $F \cup F'$ n'est pas un sous-espace vectoriel !

Soit A, B deux parties de E. La **somme** de A et B est définie par $A + B := \{a + b | a \in A, b \in B\}$.

Lemme Soit F, F' sous-espaces vectoriels de E. Alors, la somme $F + F'$ l'est aussi. $\square$

Voici un cas particulier : soit F, F' sous-espaces vectoriels de E. La somme $F + F'$ est dite une **somme directe** et notée $F \oplus F'$ si pour tout $u \in F + F'$ il existe un unique couple $(v, v') \in F \times F'$ tel que $u = v + v'$.

Lemme Soit F, F' sous-espaces vectoriels de E. Alors, la somme $F + F'$ est directe si et seulement si $F \cap F' = \{0\}$. $\square$

Soit F, G deux sous-espaces vectoriels de E. F et G sont dits **supplémentaires** dans E si $F \oplus G = E$. On dit aussi que G est un **supplémentaire** de F.

Attention Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel. Un **supplémentaire** de F n'est pas unique !

Système générateur Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Soit S une partie de E. Le **sous-espace engendré** par S, noté $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(S)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant S. On appelle S un **système générateur** ou une **famille génératrice** de $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(S)$. Une description formelle (non intuitive !) est

$$\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(S) = \bigcap_{\substack{F \subset E:\ \text{s.e.v.} \\ S \subset F}} F.$$

Plus concrètement, on suppose que S est une partie finie, i.e., il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $S = \{s_1, s_2, \cdots, s_n\}$. Alors, on a une description plus sympathique suivante :

$$\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(S) = \{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k s_k | \lambda_k \in \mathbb{K}\}.$$

On dit qu'un élément de $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(S)$ est une **combinaison linéaire** de S.

Remarque (non-traité en cours) Pour une partie $S \subset E$ infinie, on a une description suivante :

$$\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(S) = \{\sum_{s \in S} \lambda_s s | \lambda_s \in \mathbb{K},\ |\{s \in S | \lambda_s \neq 0\}| < \infty\}.$$

$\boxed{\textbf{Système libre et base}}$ Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, par exemple, $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ etc..

Soit E un $\mathbb{K}$-space vectoriel, $S = \{s_1, \cdots, s_n\}$ un système de vecteurs. On dit que

1. S est **libre** lorsque $\sum_{i=1} \lambda_i s_i = 0$ avec $\lambda_i \in \mathbb{K}$ $(1 \leq i \leq n)$ entraîne $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$,
2. sinon, on dit que S est **lié**.

Le lemme suivant explique ce que ça veut dire qu'un système vecteurs soit libre.

Lemme (unicité) Soit $S = \{s_1, \cdots, s_n\}$ un système de vecteurs. Alors, S est libre si et seulement si, pour tout $v \in E$, il existe au plus un n-uplet de scalaire $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i s_i$. $\square$

Le lemme suivant explique comment trouver un système libre.

Lemme (pratique) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $s_1, \cdots, s_n \in E$. La famille $\{s_1, \cdots, s_n\}$ est libre si et seulement si $\{s_1, \cdots, s_{n-1}\}$ est libre et $s_n \notin \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(\{s_1, \cdots, s_{n-1}\})$. $\square$

Soit F un sous-espace vectoriel de E et $\mathcal{B} = \{s_1, \cdots, s_n\}$ une famille de vecteurs de F.
$\mathcal{B}$ est dit une **base** de F si i) $\mathcal{B}$ est une famille libre et ii) $\mathcal{B}$ engendre F.