CHAPITRE VIII

Application au coloriage de cartes

Sommaire

Dans cette partie, on utilise les bases de Gröbner pour déterminer si une carte (ou plus généralement un graphe) peut être coloriée en un nombre donné de couleurs.

§ 1 Théorème des 4 couleurs

En 1852, Francis Guthrie conjecture que toute carte peut être coloriée à l'aide d'au plus quatre couleurs afin que deux régions voisines aient des couleurs différentes. Cette conjecture n'est vérifiée qu'en 1976 par Appel et Haken, en utilisant 1200 heures de calculs par ordinateurs afin de vérifier 1478 configurations critiques. Depuis, cette preuve algorithmique a été simplifiée, complètement formalisée et vérifiée à l'aide de l'assistant de preuves COQ. Il n'y a pour l'instant pas de preuve se passant de calculs informatiques.

VIII.1 Théorème (Théorème des 4 couleurs). — Toute carte découpée en régions connexes peut être colorée à l'aide de quatre couleurs de façon à ce que deux régions limitrophes aient deux couleurs différentes.

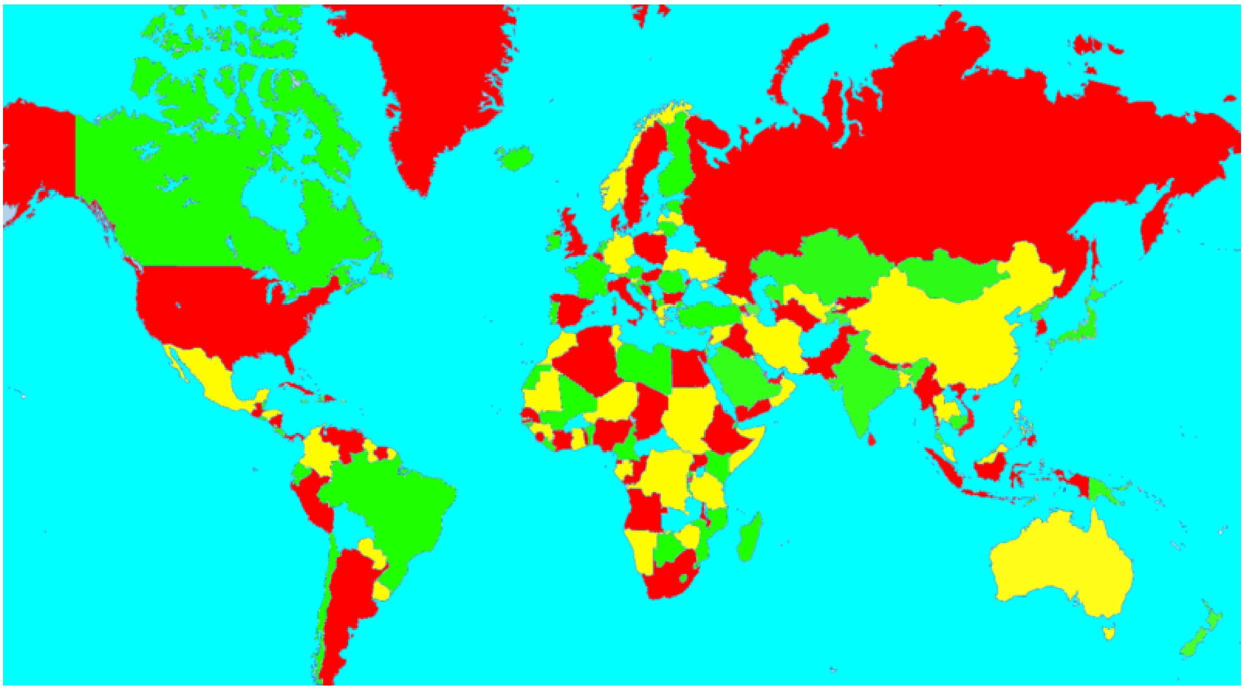

FIGURE VIII.1. – Carte du monde colorée avec 4 couleurs (Adam Iragaël, novembre 2014)

Exercice 114. — Colorier avec quatre couleurs la carte suivante :

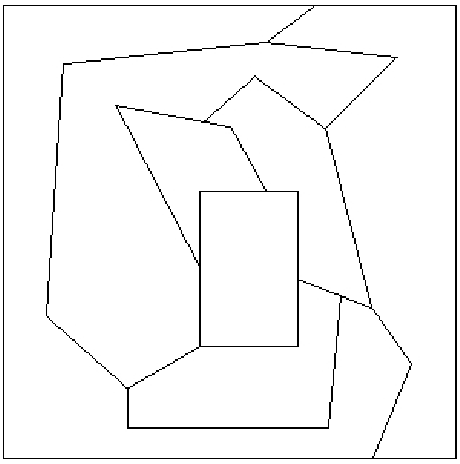

FIGURE VIII.2. – Carte à colorier

Peut-on la colorier avec seulement 3 couleurs ?

§ 2 Coloriage d'une carte avec 3 couleurs

On traduit la possibilité ou non de colorier une carte à l'aide de 3 couleurs en termes d'idéaux. Considérons une carte possédant n régions.

Ci-dessous un exemple de carte avec 8 régions :

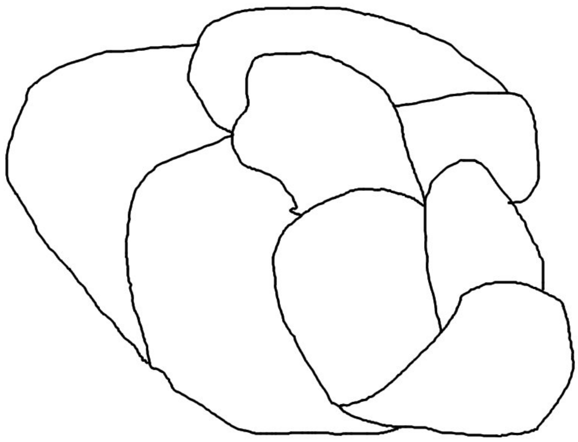

FIGURE VIII.3. – Carte 1

On représente chacune de ces régions par une indéterminée et on se place dans l'anneau de polynômes $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$. Les couleurs sont représentées par les racines 3-èmes de l'unité : 1, $j = e^{2i\pi/3}$ et j^2.

Pour chaque région i, le fait d'être coloriée par l'une de ces 3 couleurs se traduit par l'équation

$$x_i^3 = 1.$$

Pour deux régions limitrophes j et k, le fait d'avoir deux couleurs différentes se traduit par l'inéquation $x_j \neq x_k$. Comme on a

$$0 = x_j^3 - x_k^3 = (x_j - x_k)(x_j^2 + x_j x_k + x_k^2),$$

l'inéquation $x_j \neq x_k$ est équivalente à l'équation

$$x_j^2 + x_j x_k + x_k^2 = 0.$$

Pour tout i et tout couple (j,k), posons $f_i = x_i^3 - 1$ et $g_{j,k} = x_j^2 + x_j x_k + x_k^2$, polynômes de $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$. Soit V l'ensemble algébrique affine défini par

$$V(f_i, g_{j,k} \colon 1 \leq i,j,k \leq n, \text{ où } j \text{ et } k \text{ sont limitrophes}).$$

La carte donnée peut être ainsi coloriée à l'aide de seulement 3 couleurs si et seulement si $V \neq \emptyset$. Pour caractériser cette propriété à l'aide des bases de Gröbner, on va utiliser une version faible du théorème des zéros de Hilbert.

VIII.2 Théorème (admis !). — Soit $h_1,\ldots,h_s \in \mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$ alors

$$V(h_1,\ldots,h_s) = \emptyset \text{ si et seulement si } 1 \in \langle h_1,\ldots,h_s \rangle.$$

À l'aide de ce théorème, il suffit donc de déterminer si

$$1 \in I = \langle f_i, g_{j,k} \colon 1 \leq i,j,k \leq n, \text{ où } j \text{ et } k \text{ sont limitrophes} \rangle.$$

Pour cela, on calcule une base de Gröbner de I. (En fait si on calcule la base de Gröbner réduite, on aura $1 \in I$ si et seulement si cette base est réduite au polynôme 1.)

Reprenons l'exemple ci-dessus après avoir numéroté les régions :

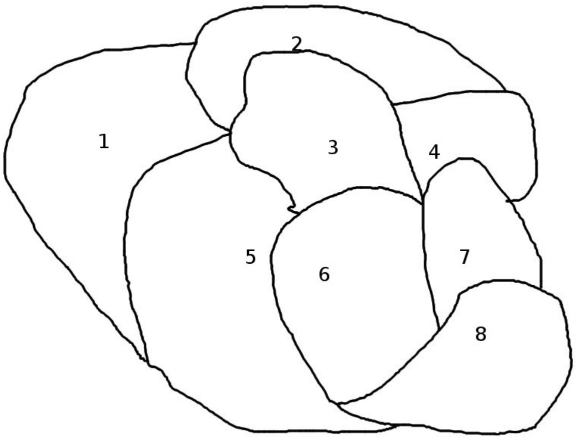

FIGURE VIII.4. – Carte 1 avec un numéro par région.

Voici un exemple de code pour déterminer si cette carte peut être coloriée à l'aide de 3 couleurs.

```
sage: R.<x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8> =PolynomialRing(QQ,'x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8')
sage: f1 = x1^3-1;f2 = x2^3-1;f3 = x3^3-1;f4 = x4^3-1;f5 = x5^3-1
sage: f6 = x6^3-1;f7 = x7^3-1;f8 = x8^3-1
sage: f12 = x1^2+x1*x2+x2^2;f15 = x1^2+x1*x5+x2^5;f23 = x3^2+x3*x2+x2^2
sage: f24 = x4^2+x4*x2+x2^2;f34 = x3^2+x3*x4+x4^2;f35 = x3^2+x3*x5+x5^2
sage: f36 = x3^2+x3*x6+x6^2;f47 = x4^2+x4*x7+x7^2;f56 = x5^2+x5*x6+x6^2
sage: f58 = x5^2+x5*x8+x8^2;f67 = x7^2+x7*x6+x6^2;f68 = x8^2+x8*x6+x6^2
sage: f78 = x7^2+x7*x8+x8^2
sage: I = Ideal(f1,f2,f3,f4,f5,f6,f7,f8,f12,f12,f23,f24,f34,f35,f36,f47,
 f56,f58,f67,f68,f78)
sage: 1 in I
        false
sage: I.groebner_basis()
        [x8^3 - 1, x1^2 + x1*x7 - x7*x8 - x8^2, x7^2 + x7*x8 + x8^2, x2 - x7,
        x3- x8, x4 + x7 + x8, x5 - x7, x6 + x7 + x8]
```

Exercice 115. — 1. Écrire un code permettant de déterminer si la carte de l'exercice 114 peut être coloriée à l'aide de 3 couleurs ?

2. Faire de même avec la carte 2 ci-dessous.
3. Faire de même avec la carte des 22 régions métropolitaines en 2014 et celle des 13 régions métropolitaines à compter du 1er janvier 2016.

   (Pour cet exercice, on pourra écrire un algorithme qui prendra en entrée le nombre de régions et la liste des régions limitrophes.)

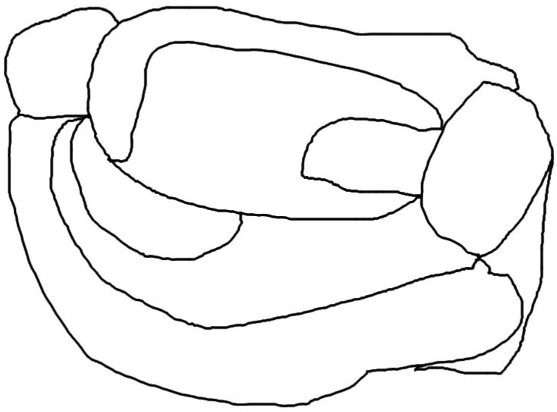

FIGURE VIII.5. – Carte 2.

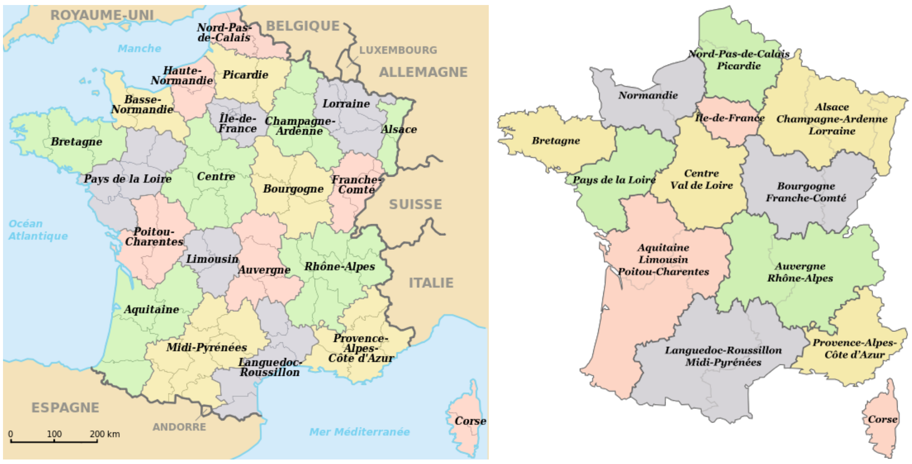

FIGURE VIII.6. – Cartes des régions de France en 2014 et à compter de janvier 2016.

VIII.2.1. Remarque.— L'algorithme utilisant le calcul des bases de Gröbner pour déterminer si une région peut être coloriée en 3 couleurs n'est pas rapide : la complexité du calcul d'une base de Gröbner d'un idéal défini comme ci-dessus est exponentielle en n. Il n'y a a priori pas d'algorithme rapide car ce problème est *NP*-complet.

Exercice 116.— Donner un exemple de carte qui ne peut pas être coloriée avec seulement 3 couleurs et possédant un minimum de régions.

Exercice 117.— Montrer que le théorème VIII.2 est un corollaire du théorème VII.5.

§ 3 Généralisation aux graphes

Une carte peut être représentée par un graphe non orienté dont les sommets sont les régions et les arêtes les couples de régions limitrophes. En fait, toute carte correspond à un graphe *planaire*, c'est-à-dire un graphe qui peut être dessiné dans le plan sans que deux arêtes ne se croisent.

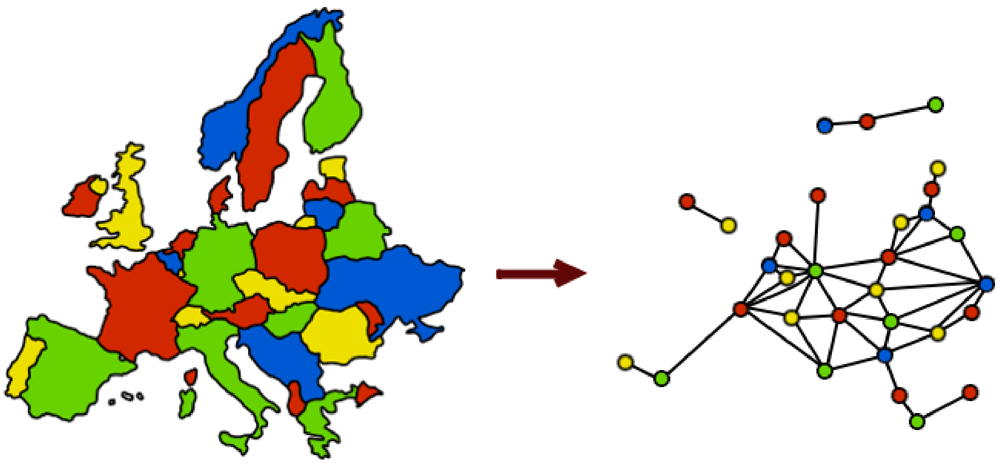

FIGURE VIII.7. – Europe sous forme d'un graphe planaire.

La question se généralise au coloriage de n'importe quel graphe fini en un nombre donné m de couleurs, tel que deux sommets adjacents aient des couleurs différentes. Rappelons qu'un graphe fini non orienté est la donnée d'un ensemble fini de sommets Γ que l'on peut numéroter de 1 à n et d'une relation binaire R sur Γ qui est antiréflexive et symétrique.

On représente alors les m couleurs par les racines m-èmes de l'unité dans $\mathbb{C}$. Pour chaque sommet i de Γ, le fait d'être coloriée par l'une des couleurs se traduit par l'équation

$$x_i^m = 1.$$

Pour deux sommets adjacents j et k (c.à.d. tels que $(j,k) \in R$), le fait d'avoir deux couleurs différentes se traduit par l'inéquation $x_j \neq x_k$. Comme on a

$$0 = x_j^m - x_k^m = (x_j - x_k)(x_j^m + x_j^{m-1}x_k + x_j^{m-2}x_k^2 + \ldots + x_j x_k^{m-1} + x_k^m),$$

l'inéquation $x_j \neq x_k$ est équivalente à l'équation

$$x_j^m + x_j^{m-1}x_k + x_j^{m-2}x_k^2 + \ldots + x_j x_k^{m-1} + x_k^m = 0.$$

On considère l'idéal I défini de manière analogue à la partie précédente. Le graphe peut alors être colorié avec m couleurs si et seulement si l'idéal I ne contient par le polynôme constant 1.

Exercice 118. — Expliquer comment on peut utiliser cette modélisation pour décider si un problème de Sudoku a une solution ou non.

		5		2				
		7	9					3
3	8	1						4
			4	6			1	7
5	7			1	2			
7						3	2	1
8					9	4		
				5		8		

FIGURE VIII.8. – Exemple de grille de Sudoku.