Structures algébriques

Groupe

Soit G un ensemble non-vide. Soit $* : G \times G \longrightarrow G$ une application. Le couple $(G, *)$ est dit un **groupe** lorsqu'ils satisfont

1. (associativité) $\quad (a * b) * c = a * (b * c) \qquad \forall\, a, b, c \in G$,
2. il existe un unique $e \in G$ tel que $a * e = e * a = a \qquad \forall\, a \in G$, et
3. pour tout $a \in G$, il existe un unique $a' \in G$ tel que $a * a' = a' * a = e$. Dans ce cas, on note a' par a^{-1}.

L'application $*$ s'appelle le **produit** ou la **multiplication**. L'élément e dans 2. s'appelle l'**élément neutre** et l'élément a^{-1} dans 3. est dit l'**inverse** de a.

En particulier, lorsque un groupe $(G, *)$ satisfait

4. $a * b = b * a \qquad \forall\, a, b \in G$,

$(G, *)$ est dit **abélien**. Dans ce cas, le produit $*$ est souvent noté par $+$ et l'inverse d'un élément $a \in G$ est noté par $-a$.

Anneau

Soit A un ensemble non-vide. Soit $*, + : A \times A \longrightarrow A$ deux applications. Le triple $(A, +, *)$ est dit un **anneau** lorsqu'ils satisfont

1. le couple $(A, +)$ est un groupe abélien (notons l'élément neutre par 0),
2. l'application $*$ est associative,
3. (distributivité) pour tout $a, b, c \in A$,
   (a) $(a + b) * c = a * c + b * c$,
   (b) $a * (b + c) = a * b + a * c$,

L'application $+$ s'appelle la **somme** et l'application $*$ s'appelle le **produit** ou la **multiplication**. Lorsque un anneau $(A, +, *)$ satisfait

4. il existe un unique $1 \in A$ tel que $1 * a = a * 1 = a$ pour tout $a \in A$,

cet anneau est dit **unitaire**, et lorsque le produit $*$ satisfait

4'. $a * b = b * a$ pour tout $a, b \in A$,

cet anneau est dit **commutatif**, sinon on le dit **non-commutatif**.

Corps

Lorsque un anneau unitaire $(K, +, *)$ satisfait

1. pour tout $a \in K \setminus \{0\}$, il existe un unique $a' \in K$ tel que $a * a' = a' * a = 1$,

cet anneau est dit un **corps**. L'élément a' sera noté par a^{-1} et dit l'**inverse** de a.

Remarque Un corps n'est pas forcément commutatif (en France). Dans certain pays, par exemple, en Angleterre, un corps est supposé d'être commutatif.