Résumé de Cours 7

Matrices Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, par exemple, $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ etc..

Soit $m, n \in \mathbb{N}^*$. Un tableau

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad a_{ij} \in \mathbb{K}\ (1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n)$$

est dite une **matrice de taille** (m, n) **dans** $\mathbb{K}$.
Lorsque $m = n$, on dit que A est une **matrice carrée de taille** (ou **de degré**) n **dans** $\mathbb{K}$.
a_{ij} est dit le **coefficient de la i-ème ligne, j-ème colonne**.

Notons

$$M_{m,n}(\mathbb{K}) := \{A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} | a_{i,j} \in \mathbb{K}\}, \qquad M_n(\mathbb{K}) := M_{n,n}(\mathbb{K}).$$

Opérations sur $M_{m,n}(\mathbb{K})$

Soit $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_{m,n}(K)$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

On définit la **somme** de deux matrices A et B par

$$A + B := (a_{ij} + b_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{K}),$$

et la **multiplication par un scalaire** par

$$\lambda A := (\lambda a_{ij}) \in M_{m,n}(K).$$

<u>**Lemme**</u> $M_{m,n}(\mathbb{K})$ est muni d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel. $\square$

Soit $p, q, r \in \mathbb{N}^*$. Pour $A = (a_{ij}) \in M_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{kl}) \in M_{q,r}(\mathbb{K})$, on dfinit le **produit** AB des matrices A et B par la matrice de taille (p, r) dont le coefficient de la i-ème ligne, j-ème colonne est

$$(AB)_{ij} := \sum_{k=1}^{q} a_{ik} b_{kj}.$$

<u>**Lemme**</u> $M_n(\mathbb{K})$ est muni d'une structure d'anneau unitaire, et non-commutatif pour $n > 1$. $\square$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. La matrice A est dite **inversible** s'il existe une unique matrice $B \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$. La matrice B est dite l'**inverse** de A.

<u>**Remarque**</u> Notons $B = (b_1, \cdots, b_n)$, où $b_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$, le produit AB s'écrit dans la forme

$$AB = A(b_1, \cdots, b_n) = (Ab_1, \cdots, Ab_n).$$

Donc, trouver la matrice B satisfaisant $AB = I_n$ équivaut à résoudre les systèmes d'équations linéaires :

$$Ab_j = (\delta_{i,j})_{1 \leq i \leq n} \qquad (1 \leq j \leq n).$$