Résumé de Cours 6

Dimension de sous-espace vectoriel Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, par exemple, $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ etc..

Soit E un $\mathbb{K}$-space vectoriel de dimension finie.

Lemme Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors,

1. $\dim F \leq \dim E$,
2. $\dim F = \dim E$ si et seulement si $F = E$.

Somme de 2 sous-espaces vectoriels Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Formule (Grassmann) Soit Soit F et G sous-espaces vectoriels de E. Alors,

$$\dim (F + G) = \dim F + \dim G - \dim (F \cap G).$$

Preuve (esquisse) Soit $\mathcal{B}$ une base de $F \cap G$.

1. Complèter $\mathcal{B}$ en bases de F et G, notées par $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ respectivement.
2. On pourra montrer que $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ est une base de $F + G$.
3. Enfin, $\dim (F + G) = |\mathcal{F} \cup \mathcal{G}| = |\mathcal{F}| + |\mathcal{G}| - |\mathcal{F} \cap \mathcal{G}| = \dim F + \dim G - \dim (F \cap G)$.

Voici un corollaire direct de cette formule :

Corollaire La somme $F + G$ est directe si et seulement si $\dim (F + G) = \dim F + \dim G$. $\square$

Somme de $p\,(\geq 3)$ sous-espaces vectoriels Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Soit $F_1, F_2, \cdots, F_p$ sous-espaces vectoriels de E. La **somme** $F_1 + F_2 + \cdots + F_p$ est le sous-espace vectoriel défini par

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_p = \left\{ \sum_{i=1}^{p} v_i \;\middle|\; v_i \in F_i \ (1 \leq i \leq p) \right\}.$$

La somme $F_1 + F_2 + \cdots + F_p$ est dite **directe** si pour tout vecteur $v \in F_1 + F_2 + \cdots + F_p$, il existe un unique p-uplet $(v_1, v_2, \cdots, v_p) \in F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_p$ tel que $v = \sum_{k=1}^{p} v_k$.

Observations Soit $F_1, F_2, \cdots, F_p$ sous-espaces vectoriels de E et $\mathcal{B}_i$ $(1 \leq i \leq p)$ une base de F_i. Alors,

1. $\mathcal{B} := \bigcup_{i=1}^{p} \mathcal{B}_i$ est un système générateur de $F_1 + F_2 + \cdots + F_p$,
2. la somme $F_1 + F_2 + \cdots + F_p$ est directe si et seulement si $\mathcal{B}$ est libre, donc une base de $F_1 + F_2 + \cdots + F_p$.

La deuxième propriété pourra reformuler de façon suivante :

Lemme La somme $F_1 + F_2 + \cdots + F_p$ est directe si et seulement si

$$\dim (F_1 + F_2 + \cdots + F_p) = \sum_{k=1}^{p} \dim F_k.$$