Résumé de Cours 5

Système libre et base Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, par exemple, $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ etc..

Soit E un $\mathbb{K}$-space vectoriel, $S = \{s_1, \cdots, s_n\}$ un système de vecteurs. On dit que

1. S est **libre** lorsque $\sum_{i=1} \lambda_i s_i = 0$ avec $\lambda_i \in \mathbb{K}$ $(1 \leq i \leq n)$ entraîne $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$,
2. sinon, on dit que S est **lié**.

Le lemme suivant explique ce que ça veut dire qu'un système vecteurs soit libre.

Lemme (unicité) Soit $S = \{s_1, \cdots, s_n\}$ un système de vecteurs. Alors, S est libre si et seulement si, pour tout $v \in E$, il existe au plus un n-uplet de scalaire $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i s_i$. □

Le lemme suivant explique comment trouver un système libre.

Lemme (pratique) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $s_1, \cdots, s_n \in E$. La famille $\{s_1, \cdots, s_n\}$ est libre si et seulement si $\{s_1, \cdots, s_{n-1}\}$ est libre et $s_n \notin \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(\{s_1, \cdots, s_{n-1}\})$. □

Soit F un sous-espace vectoriel de E et $\mathcal{B} = \{s_1, \cdots, s_n\}$ une famille de vecteurs de F.
$\mathcal{B}$ est dit une **base** de F si i) $\mathcal{B}$ est une famille libre et ii) $\mathcal{B}$ engendre F.

Le théorème suivant est fondamental :

Théorème Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel possádent une famille génératrice **fini**. Alors,

1. une base $\mathcal{B}$ de E existe et
2. le cardinal de $\mathcal{B}$ ne dṕend pas d'un choix de base. □

Le cardinal d'une base est appelé la **dimension** de E, notée par $\dim_{\mathbb{K}} E$ (ou simplement $\dim E$).

Preuve du théorème Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel possádent une famille génératrice fini.

La première étape est de montrer

Lemme Soit $\{f_1, f_2, \cdots, f_p\}$ un système libre de E et $\{g_1, g_2, \cdots, g_q\}$ un système générateur de E. Alors, $p \leq q$. □

Une conséquence de ce lemme est la deuxième partie du théorème :

Corollaire Toutes les bases de E ont le même cardinal. □

Remarque. une `base` = un `système générateur minimal` = un `système libre maximal`. □

Pour montrer la première partie du théorème, on commence par un théorème utile

Théorème (théorème de la base incomplète) Soit $\{f_1, f_2, \cdots, f_p\}$ un système libre de E. Alors, il existe $l \in \mathbb{N}$ et $f_{p+1}, \cdots f_{p+l} \in E$ tels que $\{f_1, \cdots, f_p, f_{p+1}, \cdots, f_{p+l}\}$ soit une base de E. □

Une conséquence de ce théorème est la première partie du théorème :

Corollaire E possède une base. □