# Résumé de Cours 4

**Éspace vectoriel** Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, par exemple, $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ etc..

Un ensemble $E$ non-vide est dit un **espace vectoriel sur** $\mathbb{K}$ (ou $\mathbb{K}$**-espace vectoriel**) lorsque $E$ est muni de deux opérations $+$ et $\cdot$ satisfaisant

1. $(E, +)$ est un groupe abélien, i.e.,
   (a) (associativité) $(u + v) + w = u + (v + w)$ pour tous $u, v, w \in E$,
   (b) il existe un unique élément $0 \in E$ tel que $u + 0 = 0 + u = u$ pour tout $u \in E$,
   (c) pour tout $u \in E$, il existe un unique élément noté $-u$ tel que $u + (-u) = (-u) + u = 0$, et
   (d) (commutativité) $u + v = v + u$ pour tous $u, v \in E$
2. (distributivité)
   (a) $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$ pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u, v \in E$,
   (b) $(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$ pour $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $u \in E$,
3. $\lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda\mu) \cdot u$ pour $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $u \in E$,
4. $1 \cdot u = u$ pour tout $u \in E$.

Un élément de $E$ est dit un **vecteur** et un élément de $\mathbb{K}$ est dit un **scalaire**. L'opération $+$ est dite la **loi de composition interne** ou la **somme vectorielle**. L'opération $\cdot$ est dite la la **loi de composition externe** ou la **multiplication par scalaire**.
On admettra le symbol $\cdot$, i.e., à la place d'écrire $\lambda \cdot u$, on écrira $\lambda u$ s'il n'y a pas de risque de confusion.

**Sous-éspace vectoriel** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Une partie $F \subset E$ est dite un **sous-espace vectoriel** de $E$ lorsque les 3 conditions suivantes sont satisfaites :

1. $F \neq \emptyset$,
2. $u + v \in F$ pour tous $u, v \in F$,
3. $\lambda u \in F$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u \in F$.

En effet, les conditions 2 et 3 pourra écrire en une condition :

**Lemme** Supposons que $F$ est une partie non-vide de $E$. Alors, $F$ est un sous-espace vectoriel si et seulement si $u + \lambda v \in F$ pour tous $u, v \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. □

**Remarque** Concrètement, pour montrer que $F \neq \emptyset$, il suffit de montrer que $0 \in F$.

**Opŕations sur les sous-espaces vectoriels** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

**Lemme** Soit $F, F'$ sous-espaces vectoriels de $E$. Alors, l'intersection $F \cap F'$ l'est aussi. $\square$

**Attention** Soit $F, F'$ sous-espace vectoriels de $E$. La réunion $F \cup F'$ n'est pas un sous-espace vectoriel !

Soit $A, B$ deux parties de $E$. La **somme** de $A$ et $B$ est définie par $A + B := \{a + b | a \in A,\, b \in B\}$.

**Lemme** Soit $F, F'$ sous-espaces vectoriels de $E$. Alors, la somme $F + F'$ l'est aussi. $\square$

Voici un cas particulier : soit $F, F'$ sous-espaces vectoriels de $E$. La somme $F+F'$ est dite une **somme directe** et notée $F \oplus F'$ si pour tout $u \in F+F'$ il existe un unique couple $(v, v') \in F \times F'$ tel que $u = v+v'$.

**Lemme** Soit $F, F'$ sous-espaces vectoriels de $E$. Alors, la somme $F + F'$ est directe si et seulement si $F \cap F' = \{0\}$. $\square$

Soit $F, G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$. $F$ et $G$ sont dits **supplémentaires** dans $E$ si $F \oplus G = E$. On dit aussi que $G$ est un **supplémentaire** de $F$.

**Attention** Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel. Un **supplémentaire** de $F$ n'est pas unique !

**Système générateur** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Soit $S$ une partie de $E$. Le **sous-espace engendré** par $S$, noté $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(S)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de $E$ contenant $S$. On appelle $S$ un **système générateur** ou une **famille génératrice** de $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(S)$. Une description formelle (non intuitive !) est

$$\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(S) = \bigcap_{\substack{F \subset E:\ \text{s.e.v.} \\ S \subset F}} F.$$

Plus concrètement, on suppose que $S$ est une partie finie, i.e., il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $S = \{s_1, s_2, \cdots, s_n\}$. Alors, on a une description plus sympathique suivante :

$$\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(S) = \{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k s_k | \lambda_k \in \mathbb{K}\}.$$

On dit qu'un élément de $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(S)$ est une **combinaison linéaire** de $S$.

**Remarque** (non-traité en cours) Pour une partie $S \subset E$ infinie, on a une description suivante :

$$\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(S) = \{\sum_{s \in S} \lambda_s s | \lambda_s \in \mathbb{K},\ |\{s \in S | \lambda_s \neq 0\}| < \infty\}.$$