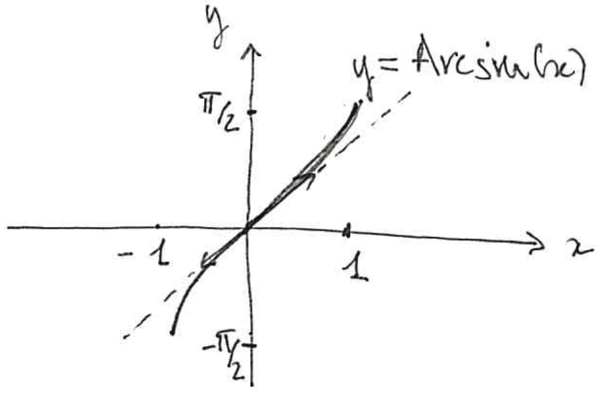
Fonction Arcsin



Déf : par le test des droites horizontales, la fonction sinus est une bijection...

... de $[-\pi/2, \pi/2]$ sur $[-1, 1]$.

$\text{Arcsin} : [-1, 1] \longrightarrow [-\pi/2, \pi/2]$ est sa bijection réciproque.

Autrement dit, $\begin{cases} y = \text{Arcsin}\, x \\ x \in [-1, 1] \end{cases}$ si et seulement si $(*) \begin{cases} x = \sin(y) \\ y \in [-\pi/2, \pi/2] \end{cases}$

(pour $x \in [-1, 1]$, $y = \text{Arcsin}(x)$ est l'unique solution de l'équation $(*)$ où x est un paramètre et y l'inconnue).

Sym : f est impaire (graphe symétrique par rapport à l'origine)

Var

x	0	1
$f(x)$	0 ↗	$\pi/2$

f est continue sur $[-1, 1]$, de classe C^∞ sur $]-1, 1[$

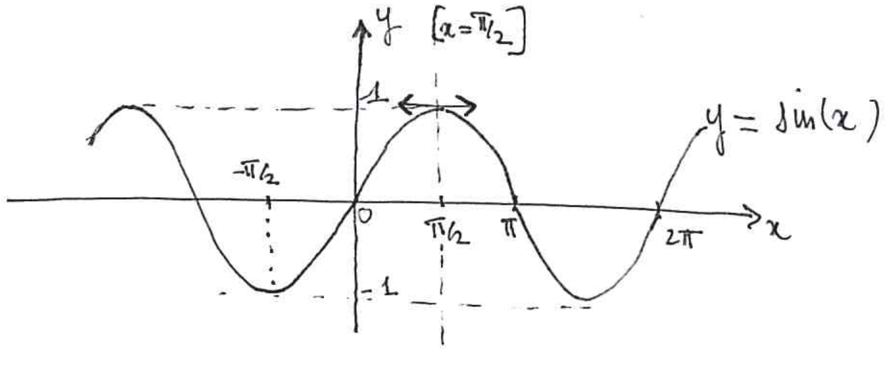
$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{pour } x \in]-1, 1[$$
$$= (1-x^2)^{-1/2} \quad : \text{croissante sur }]-1, 1[$$

$$f''(x) = x(1-x^2)^{-3/2} \geq 0 \text{ pour } x \in [0, 1[: \text{convexe sur } [0, 1[\quad (\text{concave sur }]-1, 0])$$

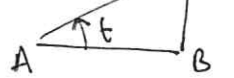
Par définition, $\arcsin(0) = 0$, $\arcsin(1) = \pi/2$, $\arcsin(1/2) = \pi/6$

$$\sin(\arcsin(x)) = x \quad \text{si} \quad x \in [-1, 1]$$
$$\arcsin(\sin x) = x \quad \underline{\underline{\text{si}}} \quad x \in [-\pi/2, \pi/2] \quad (\text{faux sinon !})$$

Fonction sinus

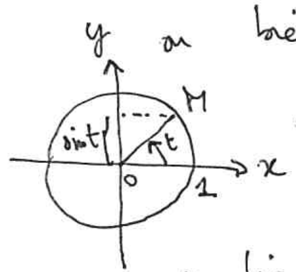


Déf : la fonction sinus est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. Pour $t \in \mathbb{R}$, $\sin(t)$ peut être évaluée de la façon suivante



$\sin t = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}}$, si $t \in [0, \pi/2]$

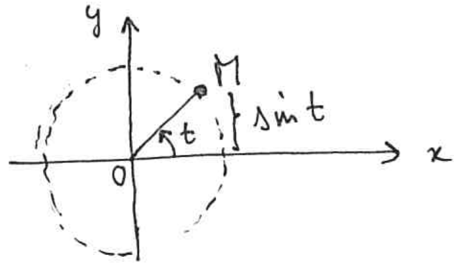
ou bien



$\sin t$ = ordonnée du point M sur le cercle trigonométrique

ou bien $\sin t = \mathrm{Im}(e^{it}) = \dfrac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$,

où e^{it} est le point du plan à distance $r = 1$ de l'origine et formant un angle $(\vec{OM}, Ox) = t$ avec la demi-droite (Ox)



Sym : f est 2π-périodique (graphe invariant par translation horizontale de longueur 2π)
f est impaire (graphe symétrique par rapport à l'origine)
$f(\pi - x) = f(x)$ (graphe symétrique par rapport à la droite verticale d'équation $x = \pi/2$)

Var :

x	0	$\pi/2$
$f(x)$	0 ↗	1

f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$

$f'(x) = \cos x \geq 0$ pour $x \in [0, \pi/2]$: croissante sur $[0, \pi/2]$

$f''(x) = -\sin x \leq 0$ pour $x \in [0, \pi/2]$: concave sur $[0, \pi/2]$