Résumé de Cours 8

Pivot de Gauss Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, par exemple, $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ etc..

Soit $m, n \in \mathbb{N}^*$ et soit $A = (a_{i,j}) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. Pour

1. `résoudre un système d'équations linéaires` $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ où
$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ avec $x_1, \cdots, x_n$ inconnus et $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ avec les scalaires $b_1, \cdots, b_m \in \mathbb{K}$, ou
2. $m = n$ `et calculer l'inverse de la matrice` A,

on applique 3 type d'`opérations sur lignes` aux matrices

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{pmatrix} \in M_{m,n+1}(\mathbb{K}) \quad \text{pour 1.} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} A & I_m \end{pmatrix} \in M_{m,2m}(\mathbb{K}) \quad \text{pour 2.},$$

définies suivantes :

(L1) permuter la i-ème ligne et la j-ème ligne $(1 \leq i \neq j \leq m)$,

(L2) multiplier par une costante non null $s \in \mathbb{K}^*$ sur la i-ème ligne $(1 \leq i \leq m)$,

(L3) ajouter $t\times$ (la j-ème ligne) avec $t \in \mathbb{K}$ sur la i-ème ligne $(1 \leq i \neq j \leq m)$.

Cette méthode s'appelle le **pivot de Gauss** sur lignes.

Interprétation matricielle

Définissons les matrices carrées $P_{i,j}^{(m)}$ $(1 \leq i < j \leq m), D_i(t)$ $(1 \leq i \leq m)$ et $E_{i,j}(t)$ $(1 \leq i \neq j \leq m)$ de taille m par

$$\begin{aligned} P_{i,j}^{(m)} &= I_m - (E_{i,i} + E_{j,j}) + E_{i,j} + E_{j,i}, \\ D_i^{(m)}(s) &= (I_m - E_{i,i}) + sE_{i,i}, \\ E_{i,j}^{(m)}(t) &= I_m + tE_{i,j}, \end{aligned}$$

où $E_{k,l} \in M_m(\mathbb{K})$ est la matrice dont la p-ème ligne et la q-ème colonne est $\delta_{k,p}\delta_{l,q}$. On peut vérifier les formules suivantes :

$$(P_{i,j}^{(m)})^2 = I_m, \qquad D_i^{(m)}(s_1)D_i^{(m)}(s_2) = D_i^{(m)}(s_1 s_2), \qquad E_{i,j}^{(m)}(t_1)E_{i,j}^{(m)}(t_2) = E_{i,j}^{(m)}(t_1 + t_2).$$

En particulier, on en dénduit que les matrices $P_{i,j}^{(m)}, D_i^{(m)}(s)$ $(s \in \mathbb{K}^*), E_{i,j}^{(m)}(t)$ $(t \in \mathbb{K})$ sont inversibles.

À l'aide de ces matrices, par calcul direct, on a

1. l'opération (L1) = la multiplication de $P_{i,j}^{(m)}$ à `gauche`,
2. l'opération (L2) = la multiplication de $D_i^{(m)}(s)$ à `gauche`,
3. l'opération (L3) = la multiplication de $E_{i,j}^{(m)}(t)$ à `gauche`.

Ici, une question naturelle se pose :

`que se passe-t-il lorsque l'on multiplie ces matrices à droite ?`

En effet, sur une matrice de taille (m, n), par calcul direct, on a

(C1) la multiplication de $P_{i,j}^{(n)}$ à `droite` $=$ la permutation de la i-ème colonne avec la j-ème colonne $(1 \leq i < j \leq m)$,

(C2) la multiplication de $D_i^{(n)}(s)$ à `droite` $=$ la multiplication par la constante s sur la i-ème colonne $(1 \leq i \leq m)$,

(C3) la multiplication de $E_{i,j}^{(n)}(t)$ à `droite` $=$ l'addition de $t\times$ (la i-ème colonne) sur la j-ème colonne $(1 \leq i \neq j \leq m)$.

C'est-à-dire, multiplications de ces matrices à droite nous donne le **pivot de Gauss** sur colonnes.

Notons l'ensemble des matrices carrées inversibles de taille $m \in \mathbb{N}^*$ par $GL_m(\mathbb{K})$.

Le rang d'une matrice

Soit A une matrice de taille (m, n) avec $m, n \in \mathbb{N}^*$. Avec le pivot de Gauss sur lignes ((L1), (L2) et (L3)) et sur colonnes ((C1), (C2) et (C3)), on peut encore transformer la matrice A à la matrice

$$\begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{m-r,r} & 0_{m-r,n-r} \end{pmatrix}.$$

Le nombre r(= la taille de la matrice unité dans les matrices ci-dessus) s'appelle le **rang** de la matrice A et notée par $\operatorname{rang} A$ ou $\operatorname{rg} A$. Cette notion est `bien-définie`, i.e., on a le théorème suivant :

Théorème Soit $m, n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A = (a_{i,j}) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice. Il existe matrices $P \in GL_m(\mathbb{K})$, $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ et un unique $r \in \mathbb{N}$ avec $r \leq \min\{m, n\}$ tels que

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{m-r,r} & 0_{m-r,n-r} \end{pmatrix}.$$

Remarque Le rang d'une matrice a une interprétation naturelle en terme d'application linéaire, alors que le théorème ci-dessus devient évident. $\square$

Bilan pratique

Voici un bilan pour les calculs :

	Matrice à calculer	Type de pivot de Gauss
Résoudre le système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$	$(A\vert\mathbf{b})$	sur lignes
Calculer A^{-1}	$(A\vert I)$	sur lignes
Calculer $\operatorname{rg} A$	A	sur lignes et colonnes

Attention Pour les deux premiers cas, on pourra aussi utiliser le pivot de Gauss sur colonnes, mais c'est déconseillé pour minimiser les erreurs. $\square$

Application linéaire Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, par exemple, $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ etc..

Soit E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Une application $f : E \to F$ est dite **linéaire** lorsque elle satisfait

1. $f(x + y) = f(x) + f(y) \qquad \forall\, x, y \in E,$
2. $f(\lambda x) = \lambda f(x) \qquad \forall\, x \in E$ et $\forall\, \lambda \in \mathbb{K}.$

Ces conditions est équivalent à

1'. $f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y) \qquad \forall\, x, y \in E$ et $\forall\, \lambda \in \mathbb{K}.$

Comment décrire une application linéaire ?

Lemme Supposons que $\dim_{\mathbb{K}} E < \infty$. Soit $\{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n\}$ une base de E et soit $\{\mathbf{f}_1, \cdots, \mathbf{f}_n\}$ une famille de vecteurs de F. Alors, il existe une unique application linéaire $f : E \to F$ telle que

$$f(\mathbf{e}_i) = \mathbf{f}_i \qquad \text{pour tout } 1 \leq i \leq n.$$

Injectivité et surjectivité

Soit E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Lemme Soit $f : E \to F$ une application linéaire et soit F' un sous-espace vectoriel de F. Alors, $f^{-1}(F')$ est un sous-espace vectoriel de E. □

En particulier, $\operatorname{Ker} f := \{x \in E | f(x) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E, appelé le **noyau** de f. Voici un critère pratique pour l'injectivité d'une application linéaire :

Lemme Une application linéaire $f : E \to F$ est injective si et seulement si $\operatorname{Ker} f = \{0\}$. □

Pour la surjectivité, il n'y a rien de nouveau...

Le sous-espace vectoriel $\operatorname{Im} f := \{f(x) | x \in E\}$ de F s'appelle l'**image** de f et la dimension de $\operatorname{Im} f$ s'appelle le **rang** de f et noté par $\operatorname{rang} f$ ou $\operatorname{rg} f$. La formule suivante est importante :

Théorème (La formule du rang) Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Supposons que $\dim E < \infty$. Alors, on a

$$\dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg} f = \dim E.$$

Pour la bijectivité, la situation est un peu particuleère :

Lemme Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Supposons que les dimensions de deux espaces vectoriels E et F soient finies.

1. Si f est bijective, alors $\dim E = \dim F$.
2. Supposons que $\dim E = \dim F$. Alors, f est bijective $\Leftrightarrow$ f est injective $\Leftrightarrow$ f est surjective. □

Citons un lemme pratique :

Lemme Soit $f : E \to F$ une application linéaire bijective. Alors, sa réciproque f^{-1} est aussi linéaire. □

$\boxed{\textbf{Opérations sur applications linéaires}}$ (non-traitées en cours)

Notons par $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F. En particulier, on note $\mathcal{L}(E, E)$ par $\mathcal{L}(E)$. L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ muni de

1. (**structure interne**) $(f + g)(x) := f(x) + g(x) \qquad \forall\, f, g \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\forall\, x \in E$,
2. (**structure externe**) $(\lambda f)(x) := \lambda(f(x)) \qquad \forall\, f \in \mathcal{L}(E, F)$, $\lambda \in \mathbb{K}$, et $x \in E$,

est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Soit G un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Lemme Soit $f_1, f_2, f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g_1, g_2, g \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors,

1. la composée $g \circ f$, définie par $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ $(x \in E)$, est une application linéaire de E dans G,
2. $g \circ (f_1 + f_2) = g \circ f_1 + g \circ f_2$,
3. $(g_1 + g_2) \circ f = g_1 \circ f + g_2 \circ f$.

En particulier, on a

Lemme $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau unitaire non-commutatif. $\square$